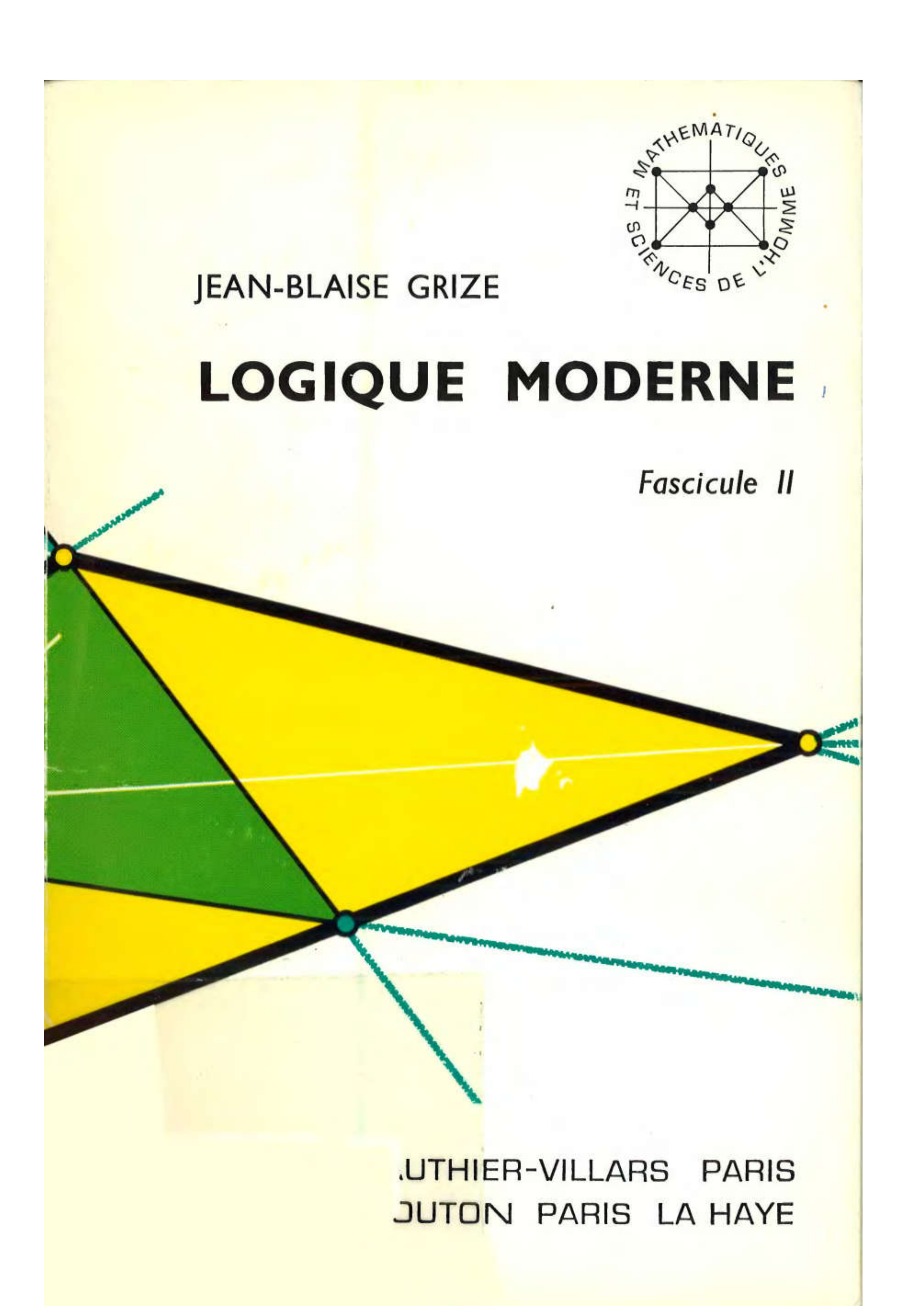


JEAN-BLAISE GRIZE

LOGIQUE MODERNE

Fascicule II

.UTHIER-VILLARS PARIS
JUTON PARIS LA HAYE

LOGIQUE MODERNE

L'ouvrage traite de la logique mathématique dans une perspective non algébrique. Il s'adresse, en effet, principalement aux étudiants et aux chercheurs en sciences humaines et non aux mathématiciens.
Il se propose une double fin:
D'une part, il veut présenter la logique comme un instrument réellement applicable à l'analyse de situations et de problèmes divers. C'est la raison pour laquelle une importance particulière a été accordée à la «déduction naturelle», système où des règles d'inférence tiennent la place des axiomes traditionnels.
D'autre part, il se propose, sans recourir à des considérations métamathématiques, d'éclairer la logique sous divers de ses aspects. C'est ainsi que, en plus de la déduction naturelle (Fascicule I), il expose pour la logique des propositions et pour celle des prédicats (Fascicule II), les notions de tables de vérité, d'axiomatisation et de modèle. Un fascicule fournira aussi des exercices, notamment des exemples de «traduction» et des compléments. Enfin un dernier cahier traitera des logiques non classiques (logiques intuitionnistes, polyvalentes, modales), toutes logiques moins connues, mais qui semblent offrir des possibilités d'avenir aux sciences de l'homme.

MOUTON
GAUTHIER-VILLARS

LOGIQUE MODERNE

Fascicule II

ÉCOLE PRATIQUE DES HAUTES ÉTUDES — SORBONNE
SIXIÈME SECTION : SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME
XIV

MOUTON/GAUTHIER-VILLARS

Jean-Blaise GRIZE

LOGIQUE MODERNE

Fascicule II

LOGIQUE DES PROPOSITIONS ET DES PRÉDICATS TABLES DE VÉRITÉ ET AXIOMATISATION

MOUTON/GAUTHIER-VILLARS

École Pratique des Hautes Études
Mouton Éditeur
7, rue Dupuytren - Paris 6
5, Herderstraat - La Haye
Éditions Gauthier-Villars
55, quai des Grands-Agustins - Paris 6

Diffusion en France:
Dunod, 92, rue Bonaparte - Paris 6

Printed in Belgium

INTRODUCTION

La logique élémentaire comporte deux parties principales. La première traite de la composition des propositions les unes avec les autres sans les analyser. La seconde, tout en conservant les résultats acquis, analyse les propositions en sujets et prédicats.

Tant la logique des propositions inanalysées que celle des prédicats peut donner lieu à diverses présentations. Nous en signalerons trois.

1. *Par des règles de déduction.* L'idée repose sur ce que raisonner logiquement, c'est partir de certaines prémisses et les enchaîner selon certaines règles. La théorie du syllogisme est la première forme d'une logique construite par la donnée d'un ensemble de règles. On a toutefois remarqué, d'une part que la syllogistique ne recouvrait pas toute la logique et, d'autre part, que ses règles paraissaient fort artificielles. G. Gentzen (1909-1945) a imaginé un système de règles qui ont donné lieu à ce qu'on a appelé la « déduction naturelle ». Sans entrer dans des considérations de nature psychologiques, on peut toutefois remarquer que ces règles ont, tout spécialement sous la forme que leur a donnée F.B. Fitch (né en 1908), un caractère qui en rend l'utilisation très aisée. C'est cette présentation que nous avons adoptée dans le premier fascicule de cet ouvrage.

2. *Par des tables de vérité.* Dans la mesure où l'on est disposé à ne prendre en considération que les propositions qui peuvent être vraies ou fausses et à négliger celles qui seraient probables, possibles, nécessaires, etc., il est possible de construire une algèbre à deux valeurs: le vrai ou 1 et le faux ou 0. C'est, en particulier ce qu'a fait G. Boole (1815-1864), fournissant par là une première réalisation de la structure algébrique qui porte aujourd'hui son nom. Cette présentation conduit pour la logique des propositions à des calculs d'une très grande facilité. Elle se heurte cependant à une difficulté considérable, si on veut l'appliquer à la logique des prédicats.

Il est bien encore possible d'y considérer les deux valeurs 1 et 0, mais les calculs, s'ils peuvent être conçus, ne peuvent être effectués: ils exigeraient une infinité d'opérations.

3. *Par des systèmes axiomatiques.* Cette méthode revient à présenter la logique comme on présente, depuis Euclide, la géométrie. La première construction complète de ce genre pour la logique des propositions et des prédicats est due à G. Frege (1848-1896). C'est certes là la façon la plus élégante de procéder et la réflexion sur la logique y trouve des commodités particulières. Son usage toutefois demande beaucoup de pratique et réclame souvent une grande ingéniosité.

Le présent fascicule expose aussi bien la méthode des tables de vérité que la méthode axiomatique. Cependant comme nous pensons que celui qui voudra appliquer la logique à des problèmes concrets le fera beaucoup plus commodément par la déduction naturelle, nous avons choisi d'insister ici davantage sur la structure de la logique que sur les techniques de calcul.

Par ailleurs, l'un des buts que nous nous sommes aussi fixé, a été de fournir au lecteur les moyens propres à lui permettre de lire soit des ouvrages de logique plus poussés, soit des textes qui font usage du formalisme logique et qui se multiplient dans les sciences humaines. C'est pourquoi nous avons introduit un certain nombre de concepts tirés de la logique des classes et des relations. Certains d'entre eux exigeraient, pour être tout à fait rigoureux, des développements assez considérables. Nous y avons renoncé, en nous attachant cependant à fournir des indications aussi précises que possible.

Ce Fascicule II forme un tout indépendant du Fascicule I. Néanmoins certaines notions qui avaient été introduites de façon détaillée à l'occasion de la présentation par les règles, n'ont été ici que reprises sommairement. De plus, nous avons, à la fin de la seconde partie, donné quelques démonstrations en déduction naturelle.

Pour faciliter la lecture, nous avons renvoyé chaque fois que la chose était nécessaire au premier fascicule. Les renvois sont notés (I, numéro du paragraphe) ou (I, p. *n*). Les renvois qui ne sont pas précédés du chiffre romain I sont internes au Fascicule II. Nous avons aussi établi un index qui regroupe les principales notions des deux fascicules. Enfin nous avons donné une liste de tous les symboles utilisés avec leur signification.

La bibliographie en revanche n'est que complémentaire à celle parue en (I, 3).

PREMIÈRE PARTIE

LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS INANALYSÉES

1.1 Les tables de vérité

Partons des trois phrases suivantes:
1) *Les vers luisants émettent de la lumière.*
2) 9 *est un nombre premier.*
3) *Les petits bateaux ont-ils des jambes?*
La première est vraie, la deuxième est fausse, quant à la troisième elle pose une question et elle n'est ni vraie, ni fausse. La logique dont nous allons traiter concerne les seules propositions dont il y a un sens à dire qu'elles sont vraies ou fausses.

D'une façon plus précise, nous appellerons *proposition* toute expression susceptible de prendre une et seulement une des deux valeurs de vérité suivantes: le vrai que nous noterons 1, le faux que nous noterons 0. Ainsi si p représente la phrase (1) ci-dessus et q la phrase (2), on pourra écrire:

$val\,(p) = 1$ soit: « la valeur (de vérité) de la proposition p est 1 » ou encore « p est vraie ».

$val\,(q) = 0$ soit: « la valeur (de vérité) de la proposition q est 0 » ou encore « q est fausse ».

Remarque
La détermination de la valeur actuelle d'une proposition n'est pas une question de logique. Ainsi c'est une affaire de biologie que de vérifier si $val\ (p) = 1$ et c'est à l'arithmétique de montrer que $val\ (q) = 0$. Cela signifie que la logique se contente de savoir que les objets dont elle s'occupe sous le nom de proposition ont l'une ou l'autre des valeurs 1 ou 0.

Soit alors $V = \text{df}\ \{1, 0\}$ l'ensemble des *valeurs de vérité* et soit Π l'ensemble des propositions au sens ci-dessus. Dire que si P est un élément

quelconque de Π, P a une valeur de vérité, c'est dire qu'il existe une application, notée *val*, de Π vers V. On a donc: $val : \Pi \to V$.

La notion mathématique d'application entraîne les deux conséquences suivantes:

1) Tout élément de Π, donc toute proposition, a une valeur dans V.
2) Un élément de Π, donc une proposition, n'a qu'une seule valeur.

Les éléments de Π peuvent être aussi bien des propositions atomiques que des propositions moléculaires (I, p. 7).

Le problème qui va nous occuper est alors le suivant: Si P est une proposition moléculaire composée des atomes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, déterminer la valeur de vérité de P. Résoudre ce problème, c'est *évaluer* P ou encore calculer l'*évaluation* de P.

Pour évaluer P, il faut se souvenir que P est composée de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ à l'aide des *foncteurs* propositionnels, que nous appellerons aussi indifféremment des *opérateurs*. Ainsi la proposition moléculaire $P = \text{df} \sim p \supset (p \vee q)$ est composée des atomes p et q par les opérateurs de négation ($\sim$), de la conditionnelle ($\supset$) et de la disjonction non exclusive ($\vee$). Nous savons que chacun des atomes a l'une des valeurs 1 ou 0. Il sera donc possible d'évaluer P si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1) La valeur de P ne dépend que des valeurs de ses atomes.
2) On connaît la façon dont les foncteurs opèrent sur les valeurs de leurs arguments.

La première condition est tout simplement postulée. Quant à la seconde, elle revient à donner une définition de chacun des opérateurs ou foncteurs propositionnels.

Remarque

Postuler que la valeur d'une proposition moléculaire ne dépend que de celles de ses atomes, revient à adopter le point de vue qu'on appelle *extensionnel*. Il s'agit là d'une décision limitative. Supposons en effet que P contienne, en particulier, l'atome p. Si l'on trouve un autre atome q qui ait la valeur 1 en même temps que p et la valeur 0 en même temps que p, on devrait pouvoir substituer q à p dans P sans modifier la valeur de P. Or ceci n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple suivant:

Soit p = df l'eau de mer contient du chlorure de sodium
q = df l'eau de mer contient du sel
P = df Aristote ne savait pas que l'eau de mer contient du chlorure de sodium.

La substitution de q à p conduit à « Aristote ne savait pas que l'eau de mer contient du sel ». On voit que la valeur de vérité de cette proposition P

ne dépend pas uniquement de celle de p. La logique classique des propositions est incapable d'en traiter.

Commençons par définir l'*opérateur de négation*. Il est naturel de poser ce qui suit:

Si $val(p) = 1$ alors $val(\sim p) = 0$

Si $val(p) = 0$ alors $val(\sim p) = 1$.

Il est commode de présenter les choses sous la forme d'une tabelle:

$val(p)$	$val(\sim p)$
1	0
0	1

ou plus simplement encore:

p	$\sim p$
1	0
0	1

Une telle tabelle, dite aussi *table de vérité*, définit l'opération de négation et permet de calculer les valeurs des propositions niées.

Exemple: calcul de la valeur de $\sim\ \sim p$.

Présentation verticale des calculs

$\sim$	$\sim$	p
1	0	1
0	1	0

Présentation horizontale des calculs

p	1	0
$\sim p$	0	1
$\sim\ \sim p$	1	0

$\sim\ \sim p$ et p ont donc toujours mêmes valeurs de vérité.

Passons maintenant aux opérateurs binaires dont nous avons étudié la manipulation dans le Fascicule I. Nous allons, comme nous l'avons déjà fait, nous appuyer sur l'usage. Il faut toutefois souligner deux faits méthodologiquement importants.

1) L'usage est une notion peu précise en ce sens qu'une même expression, comme *ou* par exemple, s'utilise en fait de plusieurs façons. Cela revient à dire que nous serons conduits à choisir certains aspects et à en négliger d'autres.

2) Cet appel à l'usage n'est qu'un procédé heuristique. Cela veut dire que, une fois une table de vérité posée, l'opérateur doit être considéré comme entièrement défini par elle et qu'il ne dépend plus en rien de son sens naïf.

Les foncteurs dont nous allons traiter opèrent donc sur deux arguments. Cela revient à dire que, appliqués à deux propositions, ils engendrent une nouvelle proposition. Chacun des atomes peut être vrai ou faux indépendamment de l'autre. Nous aurons donc quatre possibilités à envisager et nous les considérerons toujours dans l'*ordre canonique* suivant:

(1) $val(p) = val(q) = 1$ (2) $val(p) = 1,\ val(q) = 0$

(3) $val(p) = 0,\ val(q) = 1$ (4) $val(p) = val(q) = 0$.

Opérateur de conjonction $\wedge$ (I.1.4)

Nous admettrons que $p \wedge q$ n'est vraie que si p et q sont toutes deux vraies. On est conduit ainsi à la table suivante, que nous présentons de deux façons différentes. La première offre une lecture plus rapide, mais la seconde est plus commode lorsqu'on a affaire à plus de deux valeurs de vérité (V. Fascicule IV).



p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

	$\wedge$	q: 1	q: 0
p	1	1	0
	0	0	0

Il est facile de s'assurer que les propositions $p \wedge q$ et $q \wedge p$ ont mêmes valeurs de vérité.

Opérateur de disjonction non-exclusive $\vee$ (I.1.8)

Nous poserons: $p \vee q$ n'est fausse que si p et q sont fausses, ce qui conduit à la table suivante:

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

	$\vee$	q: 1	q: 0
p	1	1	1
	0	1	0

Les propositions: $p \vee q$ et $q \vee p$ ont mêmes valeurs de vérité. De plus, ainsi qu'on peut le constater, il existe une transformation simple qui permet de passer de $\vee$ à $\wedge$ et inversement. Il suffit de lire chaque table de bas en haut (1ère présentation), de remplacer les 1 par des 0 et les 0 par des 1. Cette transformation que nous retrouverons plus loin (1.5) s'appelle la *transformation duale*.

Opérateur de disjonction exclusive $\veebar$

Si, comme c'est le plus souvent le cas, la conjonction *ou* veut donner le choix entre les deux propositions qu'elle relie, il convient de ne pas considérer comme vraie la combinaison $val\,(p) = val\,(q) = 1$.
On obtient donc la table:

p	$\vee\!\vee$	q
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

	$\vee\!\vee$	q: 1	q: 0
p	1	0	1
	0	1	0

On a encore $val\,(p \vee\!\vee q) = val\,(q \vee\!\vee p)$.

Opérateur conditionnel $\supset$ (I.1.3)

Nous allons partir de l'exemple suivant:
« Si n est divisible par 6, n est pair ». On a donc une proposition de la forme $p \supset q$ avec $p =$ df n est divisible par 6 et $q =$ df n est pair.

Il est clair que si $val\,(p) = val\,(q) = 1$ alors $val\,(p \supset q) = 1$. C'est là une partie de l'information que communique la proposition conditionnelle. L'autre partie est qu'il ne se peut pas que n soit divisible par 6 sans être pair. On a donc que: si $val\,(p) = 1$ et $val\,(q) = 0$ alors $val\,(p \supset q) = 0$. Mais que se passe-t-il dans le cas où n n'est pas divisible par 6? On voit qu'il peut également arriver que n soit pair, $val\,(q) = 1$ ou impair, $val(q) = 0$. La conditionnelle $p \supset q$ ne se prononce pas sur ces éventualités. Nous poserons en conséquence la table suivante:

p	$\supset$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

		q: 1	q: 0
p	1	1	0
	0	1	1

Il importe de noter que cette façon de traiter l'opérateur conditionnel constitue un modèle souvent inadéquat de *si... alors*. Sans même revenir sur les usages du genre « si j'avais su, je ne serais pas venu », il arrive très souvent que la signification des propositions en jeu exclut la possibilité d'avoir $p \supset q$ vraie lorsque p est fausse et q vraie. Ainsi la proposition « si vous passez me voir, nous boirons une bouteille *ensemble* » ne peut pas être vraie lorsque « vous passez me voir » est fausse. Il s'agit-là d'une autre façon de mettre en évidence l'aspect extensionnel de la logique, qui ne traite que de la valeur de vérité des propositions, à l'exclusion de leur signification.

Opérateur biconditionnel $\equiv$ (I.1.5)

C'est cet opérateur qui constituerait un meilleur modèle de l'exemple qui précède. Il traduit donc les situations dans lesquelles si on a p on a q et si on n'a pas p, on n'a pas q. Il est défini par la table suivante:



p	$\equiv$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

	$\equiv$	q: 1	q: 0
p	1	1	0
	0	0	1

On remarquera qu'il est très simple de passer de la table de $\vee\!\!\vee$ à celle de $\equiv$ et inversement: il suffit d'y remplacer les 1 par des 0 et les 0 par des 1. Cette transformation est celle de *négation*. Il est enfin facile de voir que $val\,(p \equiv q) = val\,(q \equiv p)$.

1.2 Les tautologies

Les tables précédentes permettent d'évaluer n'importe quelle proposition moléculaire P dont les atomes sont composés par les opérateurs $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\vee\!\!\vee$, $\supset$ et $\equiv$ que nous venons de définir. Si P contient deux atomes, il y aura $2^2 = 4$ éventualités à examiner.

Exemple

$P = \text{df} \sim p \supset (p \vee q)$

On a, en disposant les calculs en ligne:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$\sim p$	0	0	1	1
$p \vee q$	1	1	1	0
$\sim p \supset (p \vee q)$	1	1	1	0

Si P contient trois atomes, on aura $2^3 = 8$ éventualités à étudier, ce que nous ferons en adoptant l'ordre canonique qui figure dans l'exemple suivant:

Exemple
$(p \vee q) \supset \sim (q \wedge m)$

p	1	1	1	1	0	0	0	0
q	1	1	0	0	1	1	0	0
m	1	0	1	0	1	0	1	0
$p \vee q$	1	1	1	1	1	1	0	0
$q \wedge m$	1	0	0	0	1	0	0	0
$\sim (q \wedge m)$	0	1	1	1	0	1	1	1
$(p \vee q) \supset \sim (q \wedge m)$	0	1	1	1	0	1	1	1

D'une façon générale, si P contient les n atomes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, il faudra envisager 2^n éventualités. Nous adopterons l'ordre canonique suivant. Les atomes étant ordonnés une fois pour toutes (pratiquement, on choisit l'ordre alphabétique), on écrit les suites:

p_1: $\frac{2^n}{2}$ valeurs 1, suivies de $\frac{2^n}{2}$ valeurs 0

p_2: $\frac{2^n}{4}$ valeurs 1, suivies de $\frac{2^n}{4}$ valeurs 0, suivies de $\frac{2^n}{4}$ valeurs 1, suivies de $\frac{2^n}{4}$ valeurs 0

p_3: $\frac{2^n}{8}$ valeurs 1, suivies de $\frac{2^n}{8}$ valeurs 0, etc.

p_n : une suite alternée de 1 et de 0.

Les calculs deviennent assez rapidement fastidieux, mais ils n'offrent jamais de difficultés de principe et, à toute proposition composée de n atomes, on sait faire correspondre une suite ordonnée de 2^n valeurs 1 et 0.

Exemples

A p	correspond la suite	(1 0)
à $\sim p$	la suite	(0 1)
à $p \wedge q$	la suite	(1 0 0 0)
à $(p \vee q) \supset \sim (q \wedge m)$	la suite	(0 1 1 1 0 1 1 1)

Remarque
L'introduction d'un ordre canonique permet de donner l'évaluation d'une proposition P sans préciser chaque fois à quelles valeurs des atomes correspondent les 1 et les 0 de P. Ainsi, pour $p \wedge q$ par exemple, on peut se contenter de donner le quadruple (1 0 0 0).

Répartissons les évaluations en trois catégories, selon (1) qu'il y figure des 1 et des 0 (2) qu'il n'y figure que des 1 et (3) qu'il n'y figure que des 0. Il existe des propositions qui correspondent à chacune de ces catégories. Toutes celles que nous venons de voir sont des exemples de la première. Comme le montrent les calculs suivants $p \vee \sim p$, $p \supset (q \supset p)$ sont des exemples de la deuxième et $p \wedge \sim p$, $p \wedge \sim (p \vee q)$ des exemples de la troisième.

Calculs

$p \vee \sim p$

p	1 0
$\sim p$	0 1
$p \vee \sim p$	1 1

$p \supset (q \supset p)$

p	1 1 0 0
q	1 0 1 0
$q \supset p$	1 1 0 1
$p \supset (q \supset p)$	1 1 1 1

$p \wedge \sim p$

p	1 0
$\sim p$	0 1
$p \wedge \sim p$	0 0

$p \wedge \sim (p \vee q)$

p	1 1 0 0
q	1 0 1 0
$p \vee q$	1 1 1 0
$\sim (p \vee q)$	0 0 0 1
$p \wedge \sim (p \vee q)$	0 0 0 0

Toute proposition dont l'évaluation ne contient que des 1 est une *tautologie* et toute proposition dont l'évaluation ne contient que des 0 est une *contradiction*. Il est clair que si P est une tautologie, $\sim P$ sera une contradiction et réciproquement. D'autre part, puisque une proposition atomique p prend soit la valeur 1 soit la valeur 0, seules des propositions moléculaires peuvent être des tautologies ou des contradictions. Si P est une tautologie, nous écrirons $\vdash P$.

Remarques

1. Affirmer, comme nous venons de le faire, qu'une proposition atomique, ne peut être ni une tautologie, ni une contradiction, c'est s'appuyer sur une décision propre au système logique construit et non pas constater un fait d'expérience. La proposition « les célibataires sont des gens mariés » est atomique, en ce sens qu'elle ne contient aucun des opérateurs précédents et elle exprime cependant une contradiction. Toutefois, on sait que, analysée dans la logique des prédicats, elle s'écrira:
$(\forall x)$ $(\sim ax \supset ax)$ où $ax =$ df x est marié et où être célibataire $=$ df être non marié.

Cette divergence repose sur le fait que « être une expression atomique » n'a pas le même sens dans la logique des propositions et dans celle des prédicats.

2. Nous avons utilisé le même signe $\vdash$ pour dire qu'une proposition était une tautologie et pour dire qu'elle était un théorème (I, p. 21). Il est possible, en prenant des exemples, de s'assurer que si P est un théorème alors P est une tautologie et réciproquement. Toutefois la pratique qui consiste à écrire dans les deux cas $\vdash P$ exigerait la démonstration d'un épithéorème. Une telle démonstration, si elle se voulait rigoureuse, sortirait du propos de cet ouvrage, mais nous y reviendrons cependant en 1.7.

3. Puisqu'une tautologie est vraie, quelles que soient les valeurs de ses atomes, on peut de nouveau dire qu'elle est « vraie dans tous les mondes possibles ». Elle ne fournit ainsi aucune information sur le monde lui-même.

Exemple

« Il y a des hommes sur la planète Mars ou il n'y a pas d'hommes sur la planète Mars », soit $p \vee \sim p$, ne nous renseigne absolument pas sur la planète en question.

On dit volontiers pour cela que les tautologies sont vides de sens. En fait, elles expriment des lois logiques en explicitant la façon dont les opérateurs sont utilisés.

Il est de nouveau possible de définir les relations d'implication et d'équivalence entre propositions. Nous poserons encore:

P implique $Q =$ df $P \rightarrow Q =$ df $\vdash P \supset Q$ (V. I, p. 26).
P est équivalente à $Q =$ df $P \leftrightarrow Q =$ df $\vdash P \equiv Q$ (V. I, p. 27).

La relation d'équivalence permet d'énoncer les principales propriétés des opérateurs que nous avons introduits jusqu'ici. Pour les vérifier, il suffit de remplacer toute expression de la forme $P \leftrightarrow Q$ par $\vdash P \equiv Q$ et de s'assurer par le calcul que cette dernière proposition est bien une tautologie. Nous avons:

(0) $\sim \sim p \leftrightarrow p$, *principe de la double négation.*
(1) Les opérations $\wedge$, $\vee$, $\vee\!\!\vee$ et $\equiv$ sont *commutatives*:
$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$, $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$, $p \vee\!\!\vee q \leftrightarrow q \vee\!\!\vee p$, $p \equiv q \leftrightarrow q \equiv p$.
(2) Elles sont *associatives*,
$(p \wedge q) \wedge m \leftrightarrow p \wedge (q \wedge m)$, $(p \vee q) \vee m \leftrightarrow p \vee (q \vee m)$,
$(p \vee\!\!\vee q) \vee\!\!\vee m \leftrightarrow p \vee\!\!\vee (q \vee\!\!\vee m)$, $(p \equiv q) \equiv m \leftrightarrow p \equiv (q \equiv m)$.
(3) Les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont *idempotentes*:
$p \wedge p \leftrightarrow p$, $p \vee p \leftrightarrow p$.
(4) Les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont *distributives* l'une par rapport à l'autre:

$p \wedge (q \vee m) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge m)$
$p \vee (q \wedge m) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee m)$.

L'opération $\supset$ ne jouit d'aucune des trois premières propriétés et l'opération $\equiv$ n'est pas idempotente: $p \equiv p$ est une tautologie.

Remarque

Une expression comme $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ n'est pas homogène. En effet les signes p, q et $\wedge$ font partie du système que nous étudions. Mais le signe $\leftrightarrow$ est une abréviation de la langue de communication. Il sert à dire « est équivalente à ». Ce fait nous a permis d'économiser les parenthèses. Là où, pour éviter des confusions, il faudrait écrire $\vdash (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$, puisque $\equiv$ est aussi un signe du calcul, nous avons pu nous contenter d'écrire $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$. Nous utiliserons systématiquement cette pratique dans ce qui suit.

La relation d'équivalence permet aussi de montrer que les opérateurs définis par les tables qui précèdent ne sont pas indépendants les uns des autres. Ainsi on aura:

$\vdash (p \wedge q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$ soit $p \wedge q \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$
$\vdash (p \vee q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ soit $p \vee q \leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$
$\vdash (p \veebar q) \equiv ((p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q))$ soit $p \veebar q \leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$.

Les deux premières équivalences correspondent aux lois de Morgan (I, p. 38). Assurons-nous de la troisième:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \veebar q$	0	1	1	0
$p \vee q$	1	1	1	0
$p \wedge q$	1	0	0	0
$\sim(p \wedge q)$	0	1	1	1
$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$	0	1	1	0
Proposition	1	1	1	1

On aura encore: $p \supset q \leftrightarrow \sim p \vee q \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
et $p \equiv q \leftrightarrow (p \supset q) \wedge (q \supset p)$.

Introduisons enfin un nouvel opérateur $|$ tel que $p \mid q$ s'interprète comme « pas à la fois p et q ».

Cela conduit à poser la table:

p	$\mid$	q
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	1	0

Il est facile de s'assurer que l'on a alors les équivalences suivantes:
$\sim p \leftrightarrow p \mid p \qquad p \vee q \leftrightarrow (p \mid p) \mid (q \mid q)$
$p \wedge q \leftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid q)$.

Remarque
L'opérateur $\downarrow$ dont l'évaluation est (0 0 0 1) conduit aux équivalences:
$\sim p \leftrightarrow p \downarrow p \qquad p \vee q \leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
$p \wedge q \leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.
On voit ainsi qu'un seul opérateur, soit $\mid$, soit $\downarrow$, permet de définir tous les autres par des équivalences.

Bien que représentant des lois logiques, les tautologies ne permettent pas d'effectuer des déductions. Toutefois, si une déduction est effectuée, elles permettent de s'assurer de sa correction.

Exemple
« Ceux qui veulent la paix préparent la guerre. Vous ne préparez pas la guerre, donc vous ne voulez pas la paix ».
Nous poserons:
$p =$ df vouloir la paix
$q =$ df préparer la guerre.
Le raisonnement part des deux prémisses $p \supset q$ et $\sim q$ et il conclut $\sim p$. Il suffit de voir si la conjonction des prémisses implique la conclusion, donc si $(p \supset q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ ou encore si $\vdash ((p \supset q) \wedge \sim q) \supset \sim p$. C'est bien le cas, ce qui montre tout à la fois que le raisonnement est correct et qu'il ne suffit pas d'être logique pour faire le bonheur des peuples.

1.3 Les seize opérateurs binaires

Au lieu de partir de l'usage et de s'interroger sur la façon de représenter au mieux un opérateur comme *et*, *ou*, etc, il est possible de procéder de façon formelle. Un opérateur binaire quelconque, disons $\circ$, est tel que, appliqué à deux propositions p et q, il engendre une proposition $p \circ q$. Si

l'on adopte l'ordre canonique pour les valeurs de p et de q, l'évaluation de $p \circ q$ est fournie par un quadruple $(a\ b\ c\ d)$ où a, b, c et d ont soit la valeur 1 soit la valeur 0 et ce quadruple détermine entièrement l'opérateur $\circ$.

Laissons pour l'instant la question de l'interprétation possible des opérateurs et cherchons simplement à les dénombrer exhaustivement. On aura cinq cas à étudier.

I. *(a b c d) ne contient que des 0.*
1 façon: (0 0 0 0)

II. *(a b c d) contient un 1 et trois 0.*
4 façons: (1 0 0 0) (0 1 0 0) (0 0 1 0) (0 0 0 1)

III. *(a b c d) contient deux 1 et deux 0.*
6 façons: (1 1 0 0) (1 0 1 0) (0 1 1 0) (1 0 0 1) (0 1 0 1) (0 0 1 1)

IV. *(a b c d) contient trois 1 et un 0.*
4 façons: (1 1 1 0) (1 1 0 1) (1 0 1 1) (0 1 1 1)

V. *(a b c d) ne contient que des 1.*
1 façon: (1 1 1 1).

Il existe donc 16 et seulement 16 opérateurs binaires possibles.

Remarque

On aurait pu trouver ce résultat d'une autre façon encore. Un opérateur binaire peut se concevoir comme une application dont l'ensemble de départ est l'ensemble des couples (ordonnés):
$\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$ et dont l'ensemble d'arrivée est l'ensemble $\{1,0\}$. Si $V = \{1,0\}$, un opérateur binaire est donc une application $f: V \times V \to V$ ou $V \times V$ représente l'ensemble produit V par V. Il suffit de dénombrer les applications f, ce que fait le tableau suivant, pour retrouver (cette fois-ci en colonne) les 16 quadruples.

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1

Il est possible de tirer davantage encore de ce qui précède. Soit P une proposition quelconque qui contient les deux atomes p et q. Ceux-ci peuvent figurer un nombre quelconque de fois dans P et les compositions peuvent se faire à l'aide d'un ou de plusieurs des seize opérateurs.

Exemple

$P = \mathrm{df} \sim p \supset (p \vee q)$

Dans tous les cas, l'évaluation de P conduira à l'un des seize quadruples ci-dessus. Ce sera (1 1 1 0) pour cet exemple (V. p. 8), qui est aussi l'évaluation de $p \vee q$.

Cela signifie que $\sim p \supset (p \vee q)$ est équivalente à $p \vee q$, donc que $\vdash (\sim p \supset (p \vee q)) \equiv (p \vee q)$ ou encore
$\sim p \supset (p \vee q) \leftrightarrow p \vee q$.

L'ensemble Π_2 de toutes les propositions qui contiennent deux atomes est infini, puisque chaque atome peut être répété un nombre quelconque de fois et la relation d'équivalence $\leftrightarrow$ engendre une partition de Π_2 en 16 *classes d'équivalence.* Nous noterons $[a\, b\, c\, d]$ la classe de toutes les propositions dont l'évaluation est $(a\, b\, c\, d)$.

Exemples

1) Comme nous venons de le voir $\sim p \supset (p \vee q) \in [1\ 1\ 1\ 0]$, $p \vee q \in [1\ 1\ 1\ 0]$.
2) On s'assurera que $p \supset q \in [1\ 0\ 1\ 1]$, $\sim p \vee q \in [1\ 0\ 1\ 1]$, $\sim (p \wedge \sim q) \in [1\ 0\ 1\ 1]$.

Il est aussi possible de désigner la classe $[a\, b\, c\, d]$ en choisissant l'un quelconque de ses éléments et en le plaçant entre crochets. Ainsi, par exemple, $[p \vee q]$ désignera la classe [1 1 1 0], $[p \supset q]$ désignera [1 0 1 1], etc.

Ordonnons maintenant les 16 classes. Nous dirons que la classe $[a_1\, b_1\, c_1\, d_1]$ *précède* la classe $[a_2\, b_2\, c_2\, d_2]$, et nous noterons $[a_1\, b_1\, c_1\, d_1] \leqslant [a_2\, b_2\, c_2\, d_2]$, si un représentant quelconque de $[a_1\, b_1\, c_1\, d_1]$ implique, au sens de la relation $\rightarrow$, un représentant quelconque de la classe $[a_2\, b_2\, c_2\, d_2]$.

Exemple

Soit les trois classes [1 0 0 0], [1 0 1 0] et [1 1 1 0]. On s'assure sans peine que: $p \wedge q \in [1\ 0\ 0\ 0]$, $q \wedge (p \vee \sim p) \in [1\ 0\ 1\ 0]$ et $p \vee q \in [1\ 1\ 1\ 0]$.
D'autre part, le calcul montre que:
$\vdash (p \wedge q) \supset (q \wedge (p \vee \sim p))$, $\vdash (q \wedge (p \vee \sim p)) \supset (p \vee q)$,
$\vdash (p \wedge q) \supset (p \vee q)$.

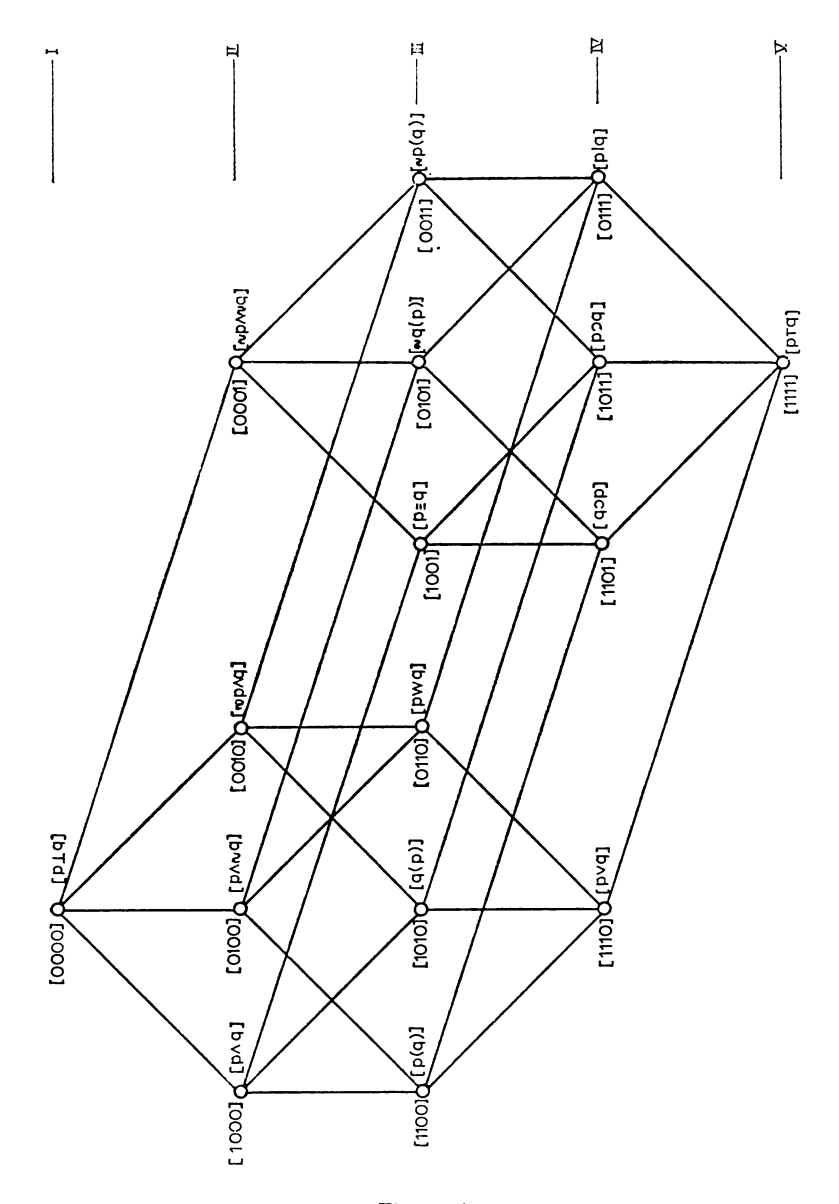

I
II
III
IV
V
[0000]
[1000]
[0100]
[0010]
[0001]
[1100]
[1010]
[0110]
[1001]
[0101]
[0011]
[1110]
[1101]
[1011]
[0111]
[1111]

Figure 1

On aura donc les implications:
$p \wedge q \rightarrow q \wedge (p \vee \sim p)$, $q \wedge (p \vee \sim p) \rightarrow p \vee q$ et $p \wedge q \rightarrow p \vee q$.
Et il s'ensuit que:
$[1\,0\,0\,0] \leqslant [1\,0\,1\,0]$, $[1\,0\,1\,0] \leqslant [1\,1\,1\,0]$ et $[1\,0\,0\,0] \leqslant [1\,1\,1\,0]$. La troisième relation découle des deux premières par la transitivité de la relation « précède », qui est une relation d'ordre.

Remarques
1) $q \leftrightarrow q \wedge (p \vee \sim p)$. En effet, cela revient à dire que $q \equiv (q \wedge (p \vee \sim p))$ est une tautologie, ce que montre le calcul suivant:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$\sim p$	0	0	1	1
$p \vee \sim p$	1	1	1	1
$q \wedge (p \vee \sim p)$	1	0	1	0
Proposition	1	1	1	1

Il aurait donc été possible de choisir q comme représentant de la classe $[1\,0\,1\,0]$. Cela exige toutefois de se souvenir que q n'est pas ici une proposition isolée, mais bien la seconde de deux atomes. Pour garder la chose en mémoire, nous écrirons $[q(p)]$ pour représenter la classe qui contient, en particulier la proposition q, mais qui contient aussi des propositions où l'atome p figure explicitement.

2) D'une façon toute semblable, nous écrirons $[p(q)]$ pour la classe $[1\,1\,0\,0]$, $[\sim p(q)]$ pour la classe $[0\,0\,1\,1]$ et $[\sim q(p)]$ pour la classe $[0\,1\,0\,1]$.

Ceci dit, il est possible d'ordonner les 16 classes d'équivalence comme le montre le diagramme précédent. On s'assurera par le calcul que les propositions choisies appartiennent bien aux classes correspondantes. Enfin nous avons écrit $\top$ pour désigner l'opérateur tel que $p \top q \in [1\,1\,1\,1]$ et $\perp$ pour représenter celui tel que $p \perp q \in [0\,0\,0\,0]$.

Ce schéma a cinq niveaux et il est disposé de telle façon que si une classe de niveau n est reliée à une classe de niveau $n + k$, elle la précède. Ainsi $[0\,1\,0\,0] \leqslant [0\,1\,1\,1]$. Toutefois deux classes quelconques ne sont pas toujours reliées: on a affaire à un ordre partiel. Les classes d'un même niveau ne sont pas ordonnées entre elles, et il n'est pas non plus possible de comparer $[1\,0\,0\,1]$ par exemple à $[0\,1\,1\,1]$.

Si l'on revient à la définition que nous avons donnée de la relation $\leqslant$, le même schéma permet de lire les implications entre les propositions, donc les tautologies.

Exemples

$\vdash (p \wedge q) \supset p$; $\vdash p \supset (p \vee q)$; $\vdash (p \wedge q) \supset (p \supset q)$.

Enfin la proposition notée $p \perp q$ implique toutes les autres. Elle correspond à la contradiction et ce fait traduit partiellement l'adage *ex falso quodlibet sequitur*. Réciproquement, toute proposition implique celle notée $p \top q$. La chose se comprend facilement puisque $p \top q$ correspond à la notion de tautologie. Soit P une proposition dont l'évaluation est $(a\, b\, c\, d)$. Formons la conditionnelle $P \supset (p \top q)$. On aura:

P	a	b	c	d
$p \top q$	1	1	1	1
$P \supset (p \top q)$	1	1	1	1

En effet, si a est 1, on a bien $val\ (1 \supset 1) = 1$ et si a est 0 on a aussi $val\,(0 \supset 1) = 1$. De même avec b, c et d.

Remarques

1) Soit P, Q et M trois propositions qui ont entre elles les relations de la figure 2. Alors M est $P \wedge Q$. De même si P, Q et M ont entre elles les relations de la figure 3, M est $P \vee Q$.

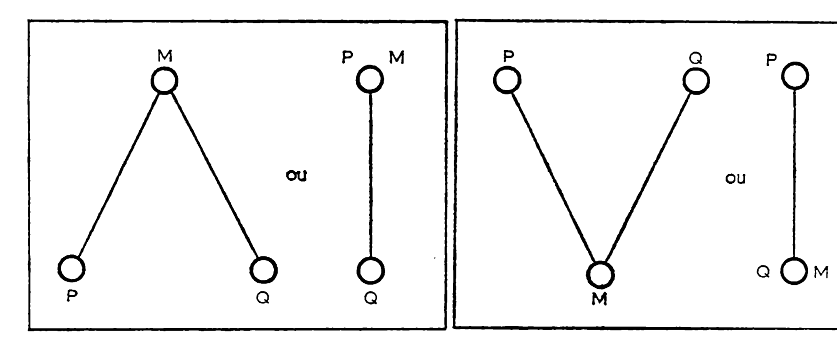


Figure 2 *Figure* 3

Exemples

$(p \equiv q) \wedge (\sim p(q)) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$; $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \leftrightarrow q(p)$

$(q \supset p) \wedge (p \equiv q) \leftrightarrow p \equiv q$; $(p \vee\!\!\vee q) \vee (\sim p \wedge q) \leftrightarrow p \vee\!\!\vee q$

2) La structure représentée à la figure 1 est isomorphe à celle de l'ensemble des parties d'un ensemble E à 4 éléments. Elle constitue de plus un exemple d'algèbre de Boole (V. Fascicule III).

1.4 Les formes normales

Commençons par résoudre le problème suivant. Soit P et Q deux propositions éléments de Π_2. Nous savons que chacune a pour évaluation l'un des 16 quadruples de la forme $(a\ b\ c\ d)$. Comment calculer, à partir d'eux, l'évaluation de $P \vee Q$?

Exemple

Nous savons que l'évaluation de $p \equiv q$ est (1 0 0 1) et que celle de $\sim p(q)$ est (0 0 1 1). Il s'agit donc de trouver l'évaluation de $(p \equiv q) \vee \sim p(q)$. On a les calculs suivants

$p \equiv q$	1	0	0	1
$\sim p(q)$	0	0	1	1
$(p \equiv q) \vee (\sim p(q))$	1	0	1	1

On constate que, si à l'une des places a, b, c, d de l'un des quadruples au moins il y a 1, il y aussi 1 dans le quadruple résultant. C'est tout simplement une autre façon de décrire la table de vérité de $\vee$.

Ceci permet de résoudre le problème inverse. Connaissant l'évaluation d'une proposition M, disons (1 0 1 1), trouver deux propositions P et Q telles que $P \vee Q$ soit équivalente à M. Un tel problème admet généralement plusieurs solutions.

Exemples

(1 0 0 1)	soit $p \equiv q$
(0 0 1 1)	soit $\sim p(q)$
(1 0 1 1)	soit M

(0 0 1 0)	soit $\sim p \wedge q$
(1 0 1 1)	soit $p \supset q$
(1 0 1 1)	soit M

(1 0 1 0)	soit $q(p)$
(1 0 0 1)	soit $p \equiv q$
(1 0 1 1)	soit M

Allons plus loin. On remarquera d'une part que rien n'empêche de chercher une proposition équivalente à M qui contienne plus d'un opérateur $\vee$ et que d'autre part quatre propositions jouissent de la propriété de n'avoir qu'un seul 1 dans leur évaluation. Ce sont $p \wedge q$ soit (1 0 0 0), $p \wedge \sim q$ soit (0 1 0 0), $\sim p \wedge q$ soit (0 0 1 0) et $\sim p \wedge \sim q$ soit (0 0 0 1).

Nous les appellerons les *conjonctions élémentaires.* Ces conjonctions élémentaires vont toujours suffire à écrire par disjonction, une proposition équivalente à tout élément de Π_2 donné.

Exemple

Si nous reprenons $M = \text{df}\ p \supset q$ dont l'évaluation est (1 0 1 1), on aura: $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow p \supset q$.

En effet, la disjonction $\vee$ est associative et il vient:

$p \wedge q$	1	0	0	0
$\sim p \wedge q$	0	0	1	0
$\sim p \wedge \sim q$	0	0	0	1
$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	1	0	1	1

D'une façon plus générale, si P est une proposition dont l'évaluation est $(a\ b\ c\ d)$, on obtiendra une proposition qui lui est équivalente, en écrivant la disjonction suivante:

$p \wedge q$	si $a = 1$,	rien si $a = 0$
$p \wedge \sim q$	si $b = 1$,	rien si $b = 0$
$\sim p \wedge q$	si $c = 1$,	rien si $c = 0$
$\sim p \wedge \sim q$	si $d = 1$,	rien si $d = 0$

Exemples

$p \equiv q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ Evaluation (1 0 0 1)

$p \vee q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ Evaluation (1 1 1 0)

On appelle *forme normale disjonctive complète* (FNDC) d'une proposition donnée P la disjonction de conjonctions élémentaires qui lui est équivalente.

Remarques

1) La FNDC d'une proposition est univoquement déterminée à l'ordre des termes près. On pourra donc parler de *la* FNDC d'une proposition P.

2) La FNDC d'une conjonction élémentaire est cette conjonction ellemême. Il s'agit d'un cas dégénéré de disjonction.

3) Seules les propositions contradictoires de la forme $p \perp q$ n'ont pas de FNDC.

4) Les tautologies sont caractérisées par le fait que leur FNDC contient les quatre conjonctions élémentaires.

La définition de la notion de FNDC ne spécifie pas que P contient deux atomes. En effet, quel que soit le nombre des atomes, il sera toujours pos-

sible de définir les conjonctions élémentaires et de refaire les raisonnements ci-dessus. La définition est donc générale.

Exemple

Nous allons chercher la FNDC de la proposition $p \equiv (q \wedge m)$. Celle-ci contient les trois atomes p, q et m. Nous aurons donc affaire à $2^3 = 8$ conjonctions élémentaires que nous écrirons dans l'ordre canonique.

(1) $p \wedge q \wedge m$ soit (1 0 0 0 0 0 0 0)
(2) $p \wedge q \wedge \sim m$ soit (0 1 0 0 0 0 0 0)
(3) $p \wedge \sim q \wedge m$ soit (0 0 1 0 0 0 0 0)
(4) $p \wedge \sim q \wedge \sim m$ soit (0 0 0 1 0 0 0 0)
(5) $\sim p \wedge q \wedge m$ soit (0 0 0 0 1 0 0 0)
(6) $\sim p \wedge q \wedge \sim m$ soit (0 0 0 0 0 1 0 0)
(7) $\sim p \wedge \sim q \wedge m$ soit (0 0 0 0 0 0 1 0)
(8) $\sim p \wedge \sim q \wedge \sim m$ soit (0 0 0 0 0 0 0 1)

Il suffit maintenant de calculer l'évaluation de $p \equiv (q \wedge m)$ pour être à même d'écrire sa FNDC.

p	1 1 1 1 0 0 0 0
q	1 1 0 0 1 1 0 0
m	1 0 1 0 1 0 1 0
$q \wedge m$	1 0 0 0 1 0 0 0
Proposition	1 0 0 0 0 1 1 1

La FNDC contiendra donc les conjonctions élémentaires numéros (1), (6), (7) et (8):

$(p \wedge q \wedge m) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim m) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge m) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim m)$.

Il existe une seconde forme normale dite conjonctive. Pour le voir, revenons aux éléments de Π_2 et partons des quatre propositions suivantes, que nous appellerons les *disjonctions élémentaires* :

$p \vee q$ soit (1 1 1 0) $p \vee \sim q$ soit (1 1 0 1)
$\sim p \vee q$ soit (1 0 1 1) $\sim p \vee \sim q$ soit (0 1 1 1).

La table de la conjonction $\wedge$ montre qu'il est possible d'obtenir une proposition quelconque d'évaluation $(a\, b\, c\, d)$ en écrivant la conjonction suivante :

$p \vee q$ si $d = 0$, rien si $d = 1$
$p \vee \sim q$ si $c = 0$, rien si $c = 1$
$\sim p \vee q$ si $b = 0$, rien si $b = 1$
$\sim p \vee \sim q$ si $a = 0$, rien si $a = 1$.

Exemple

Soit $P = \text{df } p \equiv q$, proposition dont l'évaluation est (1 0 0 1). Il vient $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$, proposition équivalente à P. En effet:

$p \vee \sim q$	1	1	0	1
$\sim p \vee q$	1	0	1	1
$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$	1	0	0	1

On appelle *forme normale conjonctive complète* (FNCC) d'une proposition P la conjonction de disjonctions élémentaires qui lui est équivalente.

Remarques

1) On notera que la FNCC d'une proposition est univoquement déterminée, qu'il existe des conjonctions dégénérées, qu'une contradiction est caractérisée par la présence des quatre disjonctions élémentaires, que les tautologies n'ont pas de FNCC et que la définition ci-dessus est valable pour un nombre quelconque d'atomes.

2) Il existe une relation intéressante entre la FNDC d'une proposition et sa FNCC. Voyons-le sur un exemple.

Soit $P = \text{df } p \equiv q$ proposition dont l'évaluation est (1 0 0 1). Nous avons vu d'autre part que:

la FNDC de P est $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
la FNCC de P est $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

Considérons maintenant $\sim P$. Son évaluation découle de celle de P, par l'application de la transformation de négation. C'est (0 1 1 0). Or, la FNDC de $\sim P$ est $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$. Elle est donc composée des conjonctions élémentaires qui manquent dans la FNDC de P. Dès lors, si dans la FNDC de $\sim P$, on permute les signes $\wedge$ et $\vee$, on obtient tout justement la FNDC de P.

Il en découle la *règle de dualité* suivante: Soit P une proposition mise en FNDC. On obtient la FNCC de $\sim P$ en remplaçant chaque atome par sa négation et en échangeant les signes $\vee$ et $\wedge$. Si P est mise en FNCC, on obtiendra la FNDC de $\sim P$ par les mêmes opérations.

Exemple

Soit la proposition $p \supset q$ dont la FNDC est $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$. La FNCC de $\sim (p \supset q)$ sera $(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$. Les opérateurs $\vee$ et $\wedge$ étant commutatifs, l'ordre est sans impor-

tance. De plus nous avons fait tacitement usage du principe de la double négation.

Vérification

L'évaluation de $p \supset q$ est (1 0 1 1). Donc celle de $\sim (p \supset q)$ est (0 1 0 0). Et on a:

$p \wedge q$	1 0 0 0
$\sim p \wedge q$	0 0 1 0
$\sim p \wedge \sim q$	0 0 0 1
Disjonction	1 0 1 1

$\sim p \vee \sim q$	0 1 1 1
$p \vee \sim q$	1 1 0 1
$p \vee q$	1 1 1 0
Conjonction	0 1 0 0

Cette remarquable propriété de dualité explique qu'il y ait eu intérêt à considérer la disjonction non exclusive $\vee$ comme plus fondamentale que la disjonction exclusive $\vee\!\!\vee$ (V. I. p. 29).

S'il est sans grand inconvénient que la FNDC d'une contradiction n'existe pas, il peut être très gênant que la FNCC d'une tautologie ne puisse s'écrire. Nous allons pour cela introduire une autre espèce de forme normale conjonctive, qui ne sera plus complète et que nous nommerons simplement FNC.

Soit une proposition quelconque, disons $\sim (p \supset q) \equiv p$. Il est possible de transformer une telle expression par des substitutions d'équivalences que nous avons examinées plus haut. Nous ferons usage:

1) Du fait que $\wedge$ et $\vee$ sont commutatives, associatives et distributives l'une par rapport à l'autre (p. 11 et 12).
2) Que le principe de la double négation est valide (p. 11).
3) Que l'on dispose des lois de Morgan (p. 12).
4) Que l'on peut exprimer $\supset$ et $\equiv$ à l'aide de $\sim$, $\vee$ et $\wedge$ (p. 12).

Appliquons ceci à la proposition donnée. Nous indiquons à côté de chaque ligne à quel groupe d'équivalences il faut faire appel pour passer à la ligne suivante:

1. $\sim (p \supset q) \equiv p$ — (4)
2. $\sim (\sim p \vee q) \equiv p$ — (3) et (2)
3. $(p \wedge \sim q) \equiv p$ — (4)
4. $((p \wedge \sim q) \supset p) \wedge (p \supset (p \wedge \sim q))$ — (4)
5. $(\sim (p \wedge \sim q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$ — (3) et (2)
6. $((\sim p \vee q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$ — (1)
7. $(\sim p \vee q \vee p) \wedge (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

On constate que, au moment où aucune des règles (1) à (4) n'est plus applicable,

1) l'expression obtenue a la forme d'une conjonction,
2) chaque facteur est une disjonction qui n'est pas nécessairement une disjonction élémentaire, en ce sens que tous les atomes n'y figurent pas toujours,
3) les signes de négation ne portent que sur les atomes.

Toute proposition qui jouit de ces trois propriétés est une *forme normale conjonctive*. On dira, dans l'exemple précédent, que $\sim (p \supset q) \equiv p$ a été mise sous FNC.

Considérons maintenant le cas d'une tautologie, disons $(p \wedge (p \supset q)) \supset q$. Mettons-la sous FNC:

1. $(p \wedge (p \supset q)) \supset q$	(4)
2. $\sim (p \wedge (\sim p \vee q)) \vee q$	(3)
3. $(\sim p \vee \sim (\sim p \vee q)) \vee q$	(3) et (2)
4. $(\sim p \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$	(1)
5. $((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \vee q$	(1)
6. $(\sim p \vee p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee q)$	(1)

On constate que la FNC existe, ce qui sera toujours le cas, puisque aucune des règles qui l'engendrent ne permet de faire disparaître un atome. De plus chacune des disjonctions contient un atome et sa négation. Cela fait que chaque disjonction a la valeur 1 et que la FNC, qui est une conjonction, a aussi la valeur 1.

1.5 Le groupe I, N, R, D

La règle de dualité ci-dessus met en jeu trois transformations:

1) passer d'une proposition à sa négation
2) remplacer les atomes p par $\sim p$ et réciproquement
3) remplacer $\vee$ par $\wedge$ et réciproquement.

Celles-ci ne sont pas sans liens entre elles et c'est même ce que la règle exprime. Toutefois il est intéressant d'étudier la chose d'une façon encore un peu différente. Pour simplifier les écritures, nous nous en tiendrons aux éléments de Π_2, mais les considérations qui suivent sont tout à fait générales.

Commençons par convenir que les lettres a', b', c', d' représenteront toujours les valeurs opposées aux lettres a, b, c, d. Donc si $a = 1$, $a' = 0$, si $a = 0$, $a' = 1$, et de même pour b', c', d'. Définissons alors la *transforma-*

tion de négation, notée **N**, et qui fait passer la classe d'équivalence $[a\ b\ c\ d]$ à la classe $[a'\ b'\ c'\ d']$:
$\mathbf{N}\ [a\ b\ c\ d] = [a'\ b'\ c'\ d']$.
Il est clair que $\mathbf{N}\ [a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d]$, c'est-à-dire que, si l'on applique deux fois de suite la transformation, on retrouve la classe dont on était parti. Il est commode, pour formuler la chose, d'introduire la *transformation identique* **I**, définie de la façon suivante:
$\mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d] = [a\ b\ c\ d]$.
On pourra donc écrire:
$\mathbf{N}\,\mathbf{N}\ [a\ b\ c\ d] = \mathbf{N}\ [a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d] = \mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d]$, ou encore: $\mathbf{N}\,\mathbf{N} = \mathbf{I}$.
Convenons d'un abus de langage et d'écriture et disons que nos transformations font passer d'une proposition (élément de la classe initiale) à une proposition (élément de la classe finale).

Ainsi nous écrirons par exemple:
$\mathbf{N}\ (1\ 0\ 0\ 0) = (0\ 1\ 1\ 1)$
et même $\mathbf{N}\ (p \wedge q) = p \mid q$.
Mais on voit par le calcul que $p \mid q \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ et l'on peut donc écrire :
$\mathbf{N}\ (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$.
On aura de même:
$\mathbf{N}\ (1\ 1\ 1\ 0) = (0\ 0\ 0\ 1)$
soit encore $\mathbf{N}\ (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$.

Si l'on applique **N** aux trois autres conjonctions élémentaires et aux trois autres disjonctions élémentaires, on constate que la transformation consiste:
1) à remplacer les atomes p et q par $\sim p$ et $\sim q$ et réciproquement,
2) à remplacer les $\wedge$ par $\vee$ et réciproquement.

Remarque
C'est ce qu'exprimaient les règles **neg** $\wedge$ et **neg** $\vee$ (V. I, 1.9).

Définissons maintenant la transformation **R** de la façon suivante:
$\mathbf{R}\ [a\ b\ c\ d] = [d\ c\ b\ a]$.
Il est clair que l'on a de nouveau $\mathbf{R}\,\mathbf{R} = \mathbf{I}$. En effet:
$\mathbf{R}\,\mathbf{R}\ [a\ b\ c\ d] = \mathbf{R}\ [d\ c\ b\ a] = [a\ b\ c\ d] = \mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d]$.
Nous aurons ainsi, par le même abus que tout à l'heure:
$\mathbf{R}\ (1\ 0\ 0\ 0) = (0\ 0\ 0\ 1)$ ou $\mathbf{R}\ (p \wedge q) = \sim p \wedge \sim q$ et
$\mathbf{R}\ (1\ 1\ 1\ 0) = (0\ 1\ 1\ 1)$ ou $\mathbf{R}\ (p \vee q) = \sim p \vee \sim q$.
Et l'on peut constater que, appliquée à une conjonction élémentaire ou à une disjonction élémentaire, la transformation **R**, consiste à remplacer les atomes p et q par $\sim p$ et $\sim q$ et réciproquement.

Remarque
Appliquée à une évaluation donnée, **R** consiste donc à la lire de droite à gauche. Ceci explique que, en décrivant la façon de construire une FNCC (V. p. 21) nous ayons dû procéder dans l'ordre d, c, b, a.

Appliquée à la classe [1 0 1 1], **R** conduit à [1 1 0 1]. Donc, on a en particulier :
$\mathbf{R}\,(p \supset q) = q \supset p$.
C'est la raison pour laquelle nous appellerons **R** la *transformation réciproque*.

Définissons enfin, avec ces notations, la *transformation duale* (V. p. 6), que nous noterons **D**:
$\mathbf{D}\,[a\,b\,c\,d] = [d'\,c'\,b'\,a']$.
On a encore $\mathbf{D}\,\mathbf{D} = \mathbf{I}$ puisque :
$\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,[a\,b\,c\,d] = \mathbf{D}\,[d'\,c'\,b'\,a'] = [a\,b\,c\,d] = \mathbf{I}\,[a\,b\,c\,d]$.
Et en particulier:
$\mathbf{D}\,(1\,0\,0\,0) = (1\,1\,1\,0)$ ou $\mathbf{D}\,(p \wedge q) = p \vee q$
$\mathbf{D}\,(1\,1\,1\,0) = (1\,0\,0\,0)$ ou $\mathbf{D}\,(p \vee q) = p \wedge q$.
D'une façon générale, appliquée à une conjonction élémentaire ou à une disjonction élémentaire, la transformation **D** consiste à remplacer les $\wedge$ par $\vee$ et réciproquement.

On constate, pour ainsi dire, que **R** et **D** accomplissent chacune une part de ce qu'effectue la transformation **N**:
1) **R** agit sur la valeur des atomes
2) **D** agit sur l'opérateur.
Ceci s'exprime rigoureusement en montrant que
$\mathbf{R}\,\mathbf{D} = \mathbf{D}\,\mathbf{R} = \mathbf{N}$
$\mathbf{RD}\,[a\,b\,c\,d] = \mathbf{R}\,[d'\,c'\,b'\,a'] = [a'\,b'\,c'\,d'] = \mathbf{N}\,[a\,b\,c\,d]$
$\mathbf{DR}\,[a\,b\,c\,d] = \mathbf{D}\,[d\,c\,b\,a] = [a'\,b'\,c'\,d'] = \mathbf{N}\,[a\,b\,c\,d]$.

Remarques
1. Il arrive assez souvent que dans la pensée spontanée, la transformation **R** soit utilisée comme négation. Ainsi peut-on observer des dialogues de la forme suivante:
— C'est un journal bête et méchant.
— C'est faux: il n'est ni bête, ni méchant.
La transformation **N** aurait conduit à: « Il n'est pas bête *ou* pas méchant ».

2. L'étude des transformations ci-dessus a été faite pour la première fois par Jean Piaget qui appelait **D** la corrélative et la notait en conséquence **C** (V. la bibliographie à la fin du fascicule).

Il nous reste à montrer que les quatre transformations **I**, **N**, **R**, **D** forment un système, au sens fort du terme. Posons pour cela, $T = \text{df}\ \{\mathbf{I}, \mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{D}\}$. Calculons l'effet de l'application successive à une classe de deux quelconques des éléments de T, c'est-à-dire calculons toutes les transformations $X\,Y$, où X et Y sont éléments de T. Le résultat est fourni par la table ci-contre. Les calculs n'offrent aucune difficulté. Ils se font sur le modèle de **R D** et **D R** qui précède.

	I	N	R	D
I	I	N	R	D
N	N	I	D	R
R	R	D	I	N
D	D	R	N	I

Il est alors possible de faire les cinq remarques suivantes:

1) Si $X, Y \in T$, $XY \in T$. La composition de deux transformations de T ne fait pas sortir de l'ensemble T.

2) Si $X, Y, Z \in T$, $(XY)Z = X(YZ)$. La composition est associative.

Il est un peu long de s'assurer complètement de la chose, mais la façon de procéder est élémentaire. Faisons-le pour **NRD**.

Calcul de (**NR**)**D** :

$\mathbf{D}\ [a\ b\ c\ d] = [d'\ c'\ b'\ a']$

$\mathbf{NR}\ [d'\ c'\ b'\ a'] = \mathbf{N}\ [a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d] = \mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d]$

Donc (**NR**)**D** = **I**.

Calcul de **N**(**RD**) :

$\mathbf{RD}\ [a\ b\ c\ d] = \mathbf{R}\ [d'\ c'\ b'\ a'] = [a'\ b'\ c'\ d']$

$\mathbf{N}\ [a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d] = \mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d]$.

Donc **N**(**RD**) = **I** et on a bien (**NR**)**D** = **N**(**RD**).

3) Il existe une transformation identique **I**.

4) Si $X \in T$, il existe $Y \in T$ telle que $XY = YX = \mathbf{I}$.

Y est l'*inverse* de X et ici chaque transformation est sa propre inverse.

5) $X, Y \in T$, $XY = YX$. La composition est commutative ce qui se voit sur la table ci-dessus: elle est symétrique par rapport à la diagonale **I** - **I**.

Ces cinq faits permettent d'affirmer que l'on a affaire à un *groupe abélien* et l'on peut montrer qu'il est isomorphe au fameux groupe de Klein (mathématicien allemand: 1849-1925).

Remarque

Il existe naturellement d'autres transformations entre les 16 classes d'équivalence dont certaines forment aussi des groupes (V. Fascicule III).

1.6 Une axiomatisation

Nous allons construire un système formel pour la logique des propositions. Le « jeu » consiste à faire comme si l'on ne savait pas de quoi il s'agit, comme si les signes utilisés n'avaient pas de signification. Ce n'est que dans une seconde étape que l'on interprète les signes et l'on est alors en droit de dire que l'on a formalisé la logique des propositions, ou autre chose. Cela dépend de l'interprétation.

La première chose à faire est de se donner un *alphabet*. Le nôtre contiendra trois catégories de signes:

1) Les lettres p_1, p_2, ... p_n, ... Nous les appellerons des *variables de propositions.*

Remarque
Cette appellation anticipe sur l'interprétation standard que nous avons en vue. Nous pourrions nous contenter de les appeler des variables, ou même des lettres.

2) Les signes $\sim$ et $\supset$ que nous appellerons des *foncteurs.*

3) Les signes (et) que nous appellerons, comme tout le monde, des *parenthèses.*

Nous allons définir maintenant une classe qu'on nomme celle des *expressions bien formées ou* ebf.

1) Une variable est une ebf.
2) Si P est une ebf, $\sim P$ est une ebf.
3) Si P et Q sont des ebf, $(P \supset Q)$ est une ebf.
4) Rien n'est une ebf, sinon par (1) à (3).

Une définition du genre ci-dessus est une *définition inductive.* Elle comporte trois sortes de clauses:
une ou plusieurs clause(s) initiale(s), ici (1);
une ou plusieurs clause(s) inductive(s), ici (2) et (3);
une clause terminale, ici (4).

Une telle définition permet d'engendrer de proche en proche autant d'éléments que l'on veut de la classe qu'elle définit. Pour éviter l'usage des indices nous poserons $p = \text{df}\, p_1$, $q = \text{df}\, p_2$ et $m = \text{df}\, p_3$.

Exemples
p, q, $\sim p$, $(\sim p \supset q)$, $(q \supset (\sim p \supset q))$, $(p \supset (q \supset p))$ sont des ebf.

La clause finale a l'air pédant. En fait, elle est d'une importance essentielle. Considérons en effet, la suite de signes $\sim (\supset p\, q)$. Elle est exclusive-

ment constituée de signes de notre alphabet. On ne peut toutefois pas l'obtenir en appliquant les clauses (1) à (3). C'est la clause terminale (4) qui nous assure que, en conséquence, il ne s'agit pas d'une ebf.

Remarque
Ceci est général. Quelle que soit la suite donnée de signes de l'alphabet, nous sommes à même de décider, en un nombre fini d'essais, si cette suite est une ebf ou non. On dit que la classe des ebf est une *classe décidable*.

L'écriture des ebf devient rapidement encombrante. Aussi allons-nous convenir de certaines abréviations. Soit l'ebf suivante:
$\sim (\sim \sim ((\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)) \supset \sim ((\sim q \supset p) \supset (\sim p \supset q)))$
Posons: $P \vee Q = \text{df} \sim P \supset Q$.
Il vient:
$\sim (\sim \sim ((p \vee q) \supset (q \vee p)) \supset \sim ((q \vee p) \supset (p \vee q)))$
Posons: $P \wedge Q = \text{df} \sim (\sim P \vee \sim Q)$ donc $\sim (\sim \sim P \supset \sim Q)$.

Il vient:
$((p \vee q) \supset (q \vee p)) \wedge ((q \vee p) \supset (p \vee q))$
Posons: $P \equiv Q = \text{df} (P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$.
Il vient:
$((p \vee q) \equiv (q \vee p))$
Convenons enfin de ne pas toujours écrire la paire extérieure de parenthèses; l'ebf initiale peut s'écrire:
$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$.

Remarque
Ces jeux d'écriture formels ne réclament aucune réflexion, mais ils exigent beaucoup d'attention. Le lecteur aura intérêt à refaire lui-même les diverses transformations, ne serait-ce que pour s'assurer que le texte ne contient pas de coquilles!

Soit P, Q, M des ebf quelconques. Introduisons les trois expressions suivantes, que nous appellerons des *schémas d'axiomes*.
(A1) $P \supset (Q \supset P)$
(A2) $(P \supset (Q \supset M)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset M))$
(A3) $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$
On obtiendra des *axiomes* en spécifiant quelles ebf désignent les lettres P, Q et M. A ce propos il faut noter deux choses:
1) Dans un même schéma, la même majuscule doit désigner la même ebf.
2) Mais dans un même schéma, deux majuscules différentes peuvent désigner la même ebf.

Remarque
Ces deux pratiques sont conformes à l'usage algébrique. Soit ainsi l'expression $x + y + x$. Si l'on attribue une valeur à x, disons 3, il faut écrire $3 + y + 3$. Mais rien n'empêche d'attribuer aussi la valeur 3 à y.

Voici quelques axiomes. Nous indiquons par la notation (**A** n) : P/ebf que dans le schéma (**A** n), la variable P désigne l'ebf qui suit la barre oblique.
$p \supset (q \supset p)$ (**A1**): $P/p,\ Q/q$
$q \supset (q \supset q)$ (**A1**): $P/q,\ Q/q$
$((p \supset q) \supset (m \supset p)) \supset (((p \supset q) \supset m) \supset ((p \supset q) \supset p))$
(**A2**): $P/(p \supset q),\ Q/m,\ M/p$
$(\sim m \supset \ \sim \sim p) \supset (\sim p \supset m)$ (**A3**): $P/m,\ Q/\sim p$
Il reste enfin à se donner au moins une *règle d'inférence*. Nous poserons:
(**R1**) De P et de $P \supset Q$, il est loisible d'inférer Q.

Ceci dit, la notion de *théorème* se définit comme suit:

1) Un axiome est un théorème.

2) Toute ebf qui résulte de deux théorèmes par l'application de la règle (**R1**) est un théorème.

3) Rien n'est un théorème, sinon par (1) et (2).

Exemples
Chacune des cinq ebf suivantes est un théorème.

1. $p \supset ((q \supset p) \supset p)$	(**A1**): $P/p,\ Q/(q \supset p)$
2. $p \supset (q \supset p)$	(**A1**): $P/p,\ Q/q$
3. $(p \supset ((q \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p))$	
	(**A2**): $P/p,\ Q/(q \supset p),\ M/p$
4. $(p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p)$	1,3,**R1**
5. $p \supset p$	2,4,**R1**

Remarques
1. Si P est un théorème, nous écrirons encore $\vdash P$.

2. La classe des théorèmes est introduite par une définition inductive, comme celle des ebf. Nous verrons (1.7) qu'elle est aussi décidable. Toutefois ceci exige une démonstration.

3. Au lieu de se donner les schémas d'axiomes (**A1** - **A3**), il serait possible de se donner directement des axiomes. Par exemple:
(**a1**) $p \supset (q \supset p)$
(**a2**) $(p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (q \supset m))$
(**a3**) $(\sim p \supset \ \sim q) \supset (q \supset p)$.
Mais pour obtenir le même ensemble de théorèmes, il faudrait se donner une règle supplémentaire:

Si P est une ebf qui contient la variable p et si Q est une ebf, on peut inférer l'ebf que l'on obtient en substituant Q à chaque mention de p dans P.

Cette façon de procéder est assez compliquée et elle exige de grandes précautions dans la logique des prédicats. C'est la raison pour laquelle nous ne l'avons pas adoptée.

Il est aussi possible de déduire des *règles dérivées*, ce qui est très commode pour la pratique. Convenons que si, à partir des prémisses $P_1, P_2, \ldots, P_n$ il est possible d'inférer Q, nous écrirons:

$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$.

Nous pourrions ainsi reformuler la règle (**R**1) de la façon suivante:

$P, P \supset Q \vdash Q$.

Voici alors une règle dérivée:

$\sim P \supset \sim Q, Q \vdash P$.

On a en effet:

1. $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$	(**A**3)
2. $\sim P \supset \sim Q$	Première prémisse
3. $Q \supset P$	1,2,(**R**1)
4. Q	Seconde prémisse
5. P	3,4,(**R**1)

Un tel calcul n'offre d'intérêt réel qu'une fois interprété. Son interprétation standard est évidente:

aux variables $P_1, P_2, \ldots, P_n$, on fait correspondre des propositions: aux signes $\sim$ et $\supset$, on fait correspondre respectivement l'opérateur de négation et celui de conditionnel;

les parenthèses jouent le rôle de ponctuation.

Dès lors, si les schémas d'axiomes et la règle d'inférence sont bien choisis, aux théorèmes correspondront des tautologies (V. 1.7).

D'autres interprétations sont toutefois possibles. Nous allons en esquisser une, en interprétant les signes $\wedge$, $\vee$ et $\sim$. Supposons que $p, q, m, \ldots$ représentent des interrupteurs électriques. Si p est fermé, laisse donc passer le courant, nous écrivons p. Dans ce cas, à $p \wedge q$ correspond un montage en série (Fig. 4) et à $p \vee q$ correspond un montage en parallèle (Fig. 5).

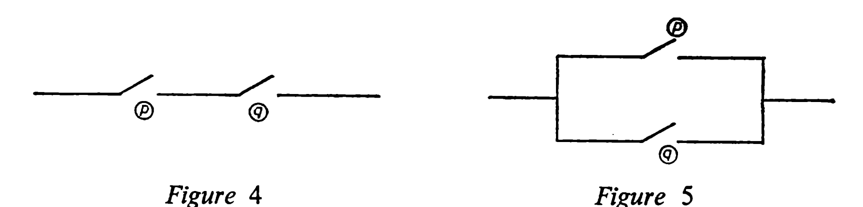


Figure 4 *Figure* 5

Nous avons noté q et p les interrupteurs et non leur état.

L'ebf suivante est un théorème du calcul:

$\vdash ((p \wedge q) \vee (p \wedge m)) \equiv (p \wedge (q \vee m))$

Cela signifie que le montage de la figure 6 peut être remplacé par le montage de la figure 7.

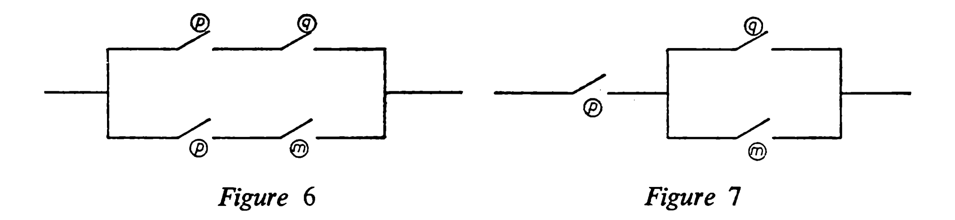


Figure 6 *Figure* 7

Il est clair que les ordinateurs ne travaillent pas avec des interrupteurs mécaniques. Leurs pıincipes logiques reposent bien toutefois sur une interprétation électrique du système précédent.

Remarque

L'axiomatisation que nous avons proposée est empruntée à ŁUKASIEWICZ. Elle n'est pas la seule possible. Ainsi dans leurs *Principia Mathematica,* WHITEHEAD et RUSSELL sont partis des opérateurs ~ et ∨ et NICOD du seul opérateur |.

1.7 Quelques propriétés de la logique des propositions

Après qu'on a construit une logique, et plus généralement un système formel quelconque, il convient d'en dégager les principales propriétés. Celles-ci doivent naturellement être démontrées. Elles font alors l'objet de théorèmes qui portent *sur* le système: nous les appellerons des *épithéorèmes.* Démontrer un épithéorème exige de disposer de certains moyens logiques. S'ils se veulent rigoureux, ceux-ci ne sont pas élémentaires et dépassent le cadre de cet ouvrage. Nous allons cependant énoncer un certain nombre d'épithéorèmes relatifs à la logique des propositions et en esquisser des preuves simples.

Remarquons d'abord que nous avons affaire à deux notions de théorèmes. Au fascicule I, nous avons dit qu'un théorème était une expression qui pouvait se déduire, par les règles du système, de la classe d'hypothèses vide. Si P est un théorème en ce sens, nous noterons provisoirement $\vdash_1 P$. Par ailleurs, nous venons de donner une autre définition de la notion de théo-

rème. Si P est un théorème en ce second sens, nous écrirons $\vdash_2 P$. La question qui se pose est de savoir, non pas si les deux notions sont les mêmes (en fait, elles sont formulées différemment), mais si la classe des théorèmes au sens 1 est la même que celle des théorèmes au sens 2. Comme, par définition, deux classes sont égales si elles contiennent les mêmes éléments, il suffit de se demander si, chaque fois que l'on a $\vdash_1 P$ on a aussi $\vdash_2 P$ et réciproquement. La réponse à cette question est affirmative.

Epithéorème 1: $\vdash_1 P$ si et seulement si $\vdash_2 P$.

La preuve doit être double. Il faut montrer:

I. Si $\vdash_1 P$ alors $\vdash_2 P$.

II. Si $\vdash_2 P$ alors $\vdash_1 P$.

Commençons par esquisser la preuve de II. Dire que $\vdash_2 P$, c'est dire que l'on a pu obtenir P à partir d'axiomes en appliquant la règle (**R**1). Or il est facile de montrer que les trois schémas d'axiomes sont des métathéorèmes au sens 1 (V. I, p. 22). Il suffit, par exemple, d'écrire avec des majuscules la déduction de l'exemple 2 de la page 15 (Fascicule I), pour obtenir (**A**1). D'autre part, la règle (**R**1) n'est rien d'autre que la règle $\supset$ **e**. Donc, tout ce qui sera théorème au sens 2, le sera au sens 1.

Esquissons maintenant la preuve de I. Nous avons vu qu'il était possible, dans le cadre de l'axiomatique précédente, de déduire des règles à partir des schémas d'axiomes. Il est clair que l'on peut procéder de même à partir de schémas de théorèmes ou métathéorèmes. Supposons, ce qui est le cas mais que nous ne démontrerons pas, que l'on ait:

$\vdash_2 P \supset (Q \supset (P \wedge Q))$.

On aura immédiatement, par une double application de ($\mathbf{R}_1$): $P, Q \vdash_2 P \wedge Q$, ce qui n'est qu'une autre écriture pour la règle $\wedge$ **i**.

En conséquence de ce premier épithéorème, nous écrirons dès maintenant $\vdash P$ pour dire que P est un théorème, aussi bien au sens 1 qu'au sens 2.

Examinons les relations entre la classe des théorèmes et celle des tautologies et, pour cela, notons provisoirement par $\vdash_t P$, le fait que P est une tautologie. Nous avons tout d'abord:

Epithéorème 2: Si $\vdash P$, alors $\vdash_t P$.

Dire que $\vdash P$, c'est dire que P a son origine dans un ou plusieurs axiomes. Mais, il est aisé de s'assurer que tous les axiomes du système sont des tautologies. En effet, quelles que soient les propositions P, Q et M, elles seront

dans notre interprétation, vraies ou fausses. On aura donc pour (A1) par exemple :

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$Q \supset P$	1	1	0	1
$P \supset (Q \supset P)$	1	1	1	1

De plus, si $\vdash P$, il est engendré à partir d'axiomes qui sont des tautologies, par la seule règle (R1). Or celle-ci conserve, si l'on peut dire, la vérité. En effet, ses deux prémisses P et $P \supset Q$ sont des tautologies. Considérons alors la table de $\supset$:

P	$\supset$	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Sa deuxième ligne est exclue par la condition $val\,(P \supset Q) = 1$. Ses lignes 3 et 4 sont exclues par la condition $val\,(P) = 1$. Il ne reste donc que la première ligne et l'on voit que $val\,(Q) = 1$.

L'épithéorème 2 a deux corollaires importants.

Définition. Un système formel, dont un signe, disons $\sim$, est interprété comme la négation est *non contradictoire*, s'il est impossible d'y démontrer à la fois P et $\sim P$.

Corollaire 1. La logique des propositions est non contradictoire.

Supposons, en effet, que $\vdash P$. Alors, par l'épithéorème 2, on $\vdash_t P$. Il s'ensuit que $\sim P$ n'a que que des 0 dans son évaluation et que $\sim \vdash_t \sim P$, c'est-à-dire que $\sim P$ n'est pas une tautologie. Par contraposition, l'épithéorème 2, montre que $\sim\vdash \sim P$, donc que $\sim P$ n'est pas un théorème.

Remarque
La *contraposée* d'un théorème de la forme « si P alors Q » est l'expression « si $\sim Q$ alors $\sim P$ ». Les deux formes sont logiquement équivalentes.

La définition de la non-contradiction exige que le système soit interprété. Qu'en est-il des systèmes purement formels ? Pour faire face à ce problème, on pose :

Définition. Un système est *consistant*, s'il possède au moins une ebf qui n'est pas un théorème.

Corollaire 2. Le système de la logique des propositions est consistant.

En effet, nous avons vu que $\vdash p \supset p$. Par l'épithéorème 2, on $\vdash_t p \supset d$. En conséquence $\sim \vdash_t \sim (p \supset p)$ et par la contraposée de l'épithéorème, $\sim (p \supset p)$ est un exemple d'ebf qui n'est pas un théorème.

Remarque

On peut prouver que si un système est non contradictoire, il est toujours consistant, mais que la réciproque n'est pas vraie. La condition de non-contradiction est donc « plus forte » que celle de consistance.

Epithéorème 3: Si $\vdash_t P$ alors $\vdash P$.

La marche de la preuve, qui est assez longue, est la suivante:

1) Démontrer que si P^* est la FNC de P, on a le métathéorème $\vdash P \equiv P^*$.

2) Si $\vdash_t P^*$ alors chacune de ses disjonctions est aussi une tautologie. Si l'une d'elles ne l'était pas, il se pourrait en effet que la conjonction ne soit pas toujours vraie.

3) Démontrer $\vdash p \vee \sim p$. Comme on a la règle dérivée $P \vdash P \vee Q$, toute disjonction élémentaire sera un théorème. Mais comme on a aussi la règle dérivée $P, Q \vdash P \wedge Q$, toute FNC tautologique sera un théorème. Donc $\vdash P^*$.

4) Démontrer que $P \equiv P^* \vdash P^* \supset P$. Alors, par les points (1), (3) et (**R**1), il vient $\vdash P$.

Cet épithéorème a aussi deux corollaires importants.

Définition. Un système interprété est *complet au sens faible*, si l'on peut y démontrer toutes les ebf qui correspondent à des vérités dans l'interprétation choisie.

Corollaire 1. Si l'on considère que toute tautologie est une vérité logique, le calcul des propositions est complet au sens faible.

L'épithéorème 3 dit, en effet, que toute tautologie est un théorème.

Mais il est de nouveau possible d'introduire une notion de complétude qui n'exige pas d'interpréter le système.

Définition. Un système est *complet au sens fort*, si l'adjonction à ses schémas d'axiomes d'un schéma d'ebf qui n'y est pas démontrable, le rend inconsistant.

Corollaire 2. Le système de la logique des propositions est complet au sens fort.

Soit en effet, un schéma d'ebf P qui n'est pas démontrable. Posons (**A**4) P. Soit de nouveau P^* la FNC de P. Nous aurons $\vdash P \equiv P^*$ et par (**A**4) et (**R**1), il viendra $\vdash P^*$ et par l'épithéorème 3, P^* est une tautologie. Par ailleus, puisque par hypothèse $\sim\vdash P$, P^* doit contenir au moins une disjonction qui ne contient pas un atome et sa négation, disons qui ne contient pas p et $\sim p$. Soit $D = \text{df } Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$ cette disjonction.

Comme on a la règle dérivée $P \wedge Q \vdash Q$ on aura en particulier $P^* \vdash D$ (P^* est une conjonction qui, entre autres facteurs, contient D). Et comme on a P^*, par ($\mathbf{R}_1$) on a $\vdash D$, soit $\vdash Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$. Les Q_i (i = 1, 2, ..., k) sont soit des atomes, soit la négation d'un atome.

Si Q_i est un atome qui n'est pas précédé d'une négation, substituons-lui p. Si Q_i est un atome précédé d'une négation, substituons-lui $\sim p$. En éliminant les doubles négations, on aura $\vdash p \vee \ldots \vee p$ et donc $\vdash p$.

Un raisonnement analogue montre qu'on peut aussi obtenir $\vdash \sim p$. En conséquence le système est contradictoire. Mais il est aussi inconsistant, par la règle: $P, \sim P \vdash Q$.

Remarque
La terminologie utilisée laisse entendre, ce qu'on peut démontrer, qu'un système peut être complet au sens faible sans l'être au sens fort (V. 2.4).

Si l'on réunit les épithéorèmes 2 et 3, on est conduit à:

Epithéorème 4: $\vdash P$ si et seulement si $\vdash_t P$.

Il en découle aussi un corollaire intéressant.

Définition. Un système est *décidable* si, étant donné une de ses ebf quelconque, il existe un algorithme qui permet de décider si cette ebf est un théorème du système ou non.

Corollaire. Le système de la logique des propositions est décidable.

L'algorithme est le suivant. Soit P l'ebf donnée, on calcule son évaluation. Si elle ne contient que des 1, alors $\vdash_t P$ et $\vdash P$. Sinon $\sim \vdash_t P$ et $\sim \vdash P$.

Remarques
1. Nous avons donné trois présentations de la logique des propositions: par les règles de déduction, par les tables de vérité et par une axiomatisation. Les tables de vérité fournissent les manipulations les plus aisées. Malheureusement, elles ne peuvent s'étendre à la logique des prédicats. C'est la présentation axiomatique qui conduit aux manipulations les plus difficiles. Il y faut souvent beaucoup de pratique et d'imagination. C'est toutefois elle

qui se prête le mieux à la réflexion sur la logique. Enfin la méthode de la déduction naturelle est celle qui est généralisable et qui semble la plus commode à utiliser.

2. Les raisonnements de ce paragraphe manquent de rigueur. Il ne faut les tenir que pour des indications, propres tout au plus à faire pressentir le genre de démarches auxquelles conduit ce qu'on appelle la métalogique (V. la bibliographie).

DEUXIÈME PARTIE

LA LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

2.1 Le cadre de la logique des prédicats

Comme nous l'avons vu (Fascicule I, 2.1), la logique des prédicats contient celle des propositions inanalysées, mais elle la déborde en ceci qu'elle peut décomposer les propositions en sujets et prédicats. Pour ce faire elle introduit essentiellement deux nouvelles espèces de variables: les variables d'objets et les variables de prédicats.

Commençons par nous interroger plus avant sur les *variables d'objets* dites aussi *variables d'individus*: x, y, z, etc. Dans une proposition comme « Pierre aide Jean » ne figure aucune variable, mais le nom de deux objets, qui sont ici des individus: « Pierre » et « Jean ». On peut se demander si une langue comme le français est capable d'exprimer la notion de variable d'objet. Peut-être est-ce le cas dans des phrases comme « Quelqu'un aide Jean ». « Quelqu'un » semble bien renvoyer à une classe d'individus, un peu comme x y renvoie dans « x aide Jean ». Quoi qu'il en soit, nous n'allons pas nous donner, pour le moment, les instruments formels qui permettraient de nommer des objets particuliers (V. 2.7). Tout au plus allons-nous, en guise d'exemples et seulement pour concrétiser nos explications, introduire passagèrement des noms d'objets x_1, x_2, etc.

En revanche, il n'y aurait aucun sens à parler de variables, si l'on ne précisait pas sur quel ensemble elles prennent leurs valeurs. Cela signifie que nous introduirons toujours des ensembles d'objets Ω, que nous appellerons aussi simplement des *domaines*. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de spécifier quels sont les éléments de ces domaines. Il suffit de savoir que x, y, z, etc. prennent leurs valeurs sur eux et nous verrons plus loin que le seul aspect important d'un domaine est le nombre de ses éléments s'il est fini et, en général, son cardinal que nous noterons $|\Omega|$.

Passons maintenant aux *variables de prédicats*. Rappelons que, pour des raisons de commodité, nous utiliserons les lettres a, b, c pour désigner les prédicats à une place, c'est-à-dire les *propriétés* et les lettres r, s, t pour désigner les prédicats à plus d'une place, c'est-à-dire les *relations*. Nous avions encore convenu d'un ordre d'écriture: « x est rouge » s'écrit « rouge x » et « x aide y » s'écrit « aide x y ».

Ce qu'il faut bien noter c'est qu'un prédicat a nécessairement un nombre de places déterminé. Ainsi « rouge » a une place et « aider » en a deux. Une variable de prédicat prend une constante de prédicat comme valeur. Aussi pourrait-on écrire par exemple: a①, b①, r①②, s①②③ pour préciser que les variables a et b vont prendre comme valeurs des propriétés et que les variables r et s vont prendre comme valeurs des relations, la première binaires et la seconde ternaires. Cette façon de procéder est toutefois un peu encombrante et nous préférons écrire ax, bx, rxy et $sxyz$, expressions que nous avons appelées des *fonctions propositionnelles*. Nous avions dit, que si les variables d'objets d'une fonction propositionnelle prenaient des valeurs déterminées, on obtenait alors des propositions. Ainsi si r signifie aider, si x prend la valeur « Pierre » et y la valeur « Jean », la fonction propositionnelle rxy devient la proposition (vraie ou fausse) « Pierre aide Jean ».

Remarque

La même proposition peut résulter de fonctions propositionnelles différentes. La proposition ci-dessus peut résulter de « x aide y », de « x aide Jean » et de « Pierre aide y », Il est vrai que, si au niveau de la langue il n'y a pas trop de difficultés à concevoir que « aide Jean » est un prédicat, il est moins clair que « Pierre aide » en soit un. Ceci n'a toutefois aucune conséquence sur l'analyse qui précède: elle est de nature logique et non pas linguistique.

Peut-être a-t-on remarqué que nous ne nous sommes pas exprimés de la même façon à propos des variables de prédicats et des variables d'objets. Ainsi avons-nous dit, dans l'exemple ci-dessus, que r signifiait « aider » et que x et y *prenaient* certaines valeurs. La distinction repose sur ceci que nous nous sommes donné un ensemble Ω dont les éléments sont les valeurs des variables x, y, ..., tandis que nous ne nous sommes pas donné un ensemble correspondant pour les variables a, b, ..., r, s, ...

Dans le Fascicule I, nous nous étions contenté de supposer que l'on disposait aussi d'un ensemble de prédicats. Nous allons maintenant préciser la chose et montrer qu'il est toujours possible de construire cet ensemble à l'aide de Ω seulement. Pour traiter la question, donnons-nous un domaine particulier $\Omega = \text{df } \{x_1, x_2\}$. Supposons encore, pour être plus concret, que x_1 soit un nom pour KANT et x_2 pour DESCARTES. Soit alors les quatre constantes de prédicats suivantes:

$a_1 x$ = df x est un philosophe
$a_2 x$ = df x est Allemand
$a_3 x$ = df x est Français
$a_4 x$ = df x est un plaisantin.
Nous obtenons sans difficulté la table suivante:

x	$a_1 x$	$a_2 x$	$a_3 x$	$a_4 x$
x_1	1	1	0	0
x_2	1	0	1	0

Chaque expression de la forme $a_i x_j$ ($i = 1,2,3,4$ et $j = 1,2$) est en effet une proposition dont un minimum de lectures permet de déterminer la valeur.

Deux faits fondamentaux doivent être signalés.

1) Tous les prédicats que l'on peut imaginer, à condition qu'il y ait un sens à les appliquer à x_1 et à x_2, rentrent nécessairement dans l'une de ces quatre catégories. Quant à la restriction sur le sens qu'il y a ou non à appliquer n'importe quel prédicat à n'importe quel objet, c'est un problème que nous n'avons pas plus à traiter que celui de savoir si une proposition donnée est « réellement » vraie ou si elle est fausse. En fait, nous construisons un certain modèle qui a ses lois propres. Une fois encore nous nous plaçons au point de vue de l'extension et c'est une question extralogique que d'estimer la valeur épistémologique de nos modèles.

Nous poserons donc que la donnée de Ω détermine entièrement les valeurs que peuvent prendre les variables de prédicats à une place. En fait celles-ci ne sont rien d'autre que toutes les applications $f: \Omega \rightarrow V$. Et si $|\Omega| = n$, alors une variable du type a ① peut prendre 2^n valeurs différentes.

2) On voit aussi que, comme nous l'avons annoncé, la nature des éléments de Ω n'importe pas. Nous aurions obtenu les mêmes résultats en partant de Ω = df $\{y_1, y_2\}$. Seul joue un rôle le nombre des éléments de Ω, son cardinal.

Il est facile d'étendre le raisonnement précédent aux variables de prédicats à plus d'une place. Ainsi pour rxy, par exemple, et avec $\Omega = \{x_1, x_2\}$, on aura:

x y	r_1xy	r_2xy	r_3xy	r_4xy	r_5xy	r_6xy	r_7xy	r_8xy	$r_9xy \ldots r_{15}xy$		$r_{16}xy$
x_1 x_1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
x_1 x_2	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0
x_2 x_1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
x_2 x_2	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0

Les valeurs des variables du type $r①②$ correspondent donc à l'ensemble des applications $f: \Omega \times \Omega \to V$. Si $|\Omega| = n$, l'ensemble produit $\Omega \times \Omega$ a n^2 éléments. Le nombre des valeurs que peut prendre une variable de relations binaires est donc 2^{n^2}.

Enfin, le nombre des valeurs que peut prendre une variable de relations à k éléments sera 2^{n^k}.

Rappelons enfin que, en plus des foncteurs propositionnels, la logique des prédicats contient deux opérateurs qui lui sont propres: le quantificateur universel $\forall$ et le quantificateur existentiel $\exists$.

Remarque
Au lieu de $(\forall x)$, on trouve encore dans la littérature: (x), $\bigwedge x$, Πx. Et, au lieu de $(\exists x)$, on trouve aussi: $(\mathrm{E}\, x)$, $\bigvee x$, Σx.

Lorsque Ω est fini, le quantificateur universel se comporte comme une conjonction de n facteurs et le quantificateur existentiel comme une disjonction entre n termes.

Exemple
Si $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$, alors:
$(\forall x)\, ax \leftrightarrow ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3$ et
$(\exists x)\, ax \leftrightarrow ax_1 \vee ax_2 \vee ax_3$.

2.2 Notion de validité

Nous savons que la logique des prédicats contient deux types d'expressions:

1) celles qui n'ont aucune variable d'objets libre, que nous appellerons des expressions *fermées* et
2) celles qui ont au moins une variable d'objets libre et que nous pourrions appeler des expressions *ouvertes*.

Les expressions fermées, avons-nous dit, représentent des propositions et, en conséquence, elles sont soit vraies soit fausses. Voyons donc comment les évaluer, dans le cas où le domaine choisi Ω est fini. Nous allons poser $\Omega = \mathrm{df}\, \{x_1, x_2\}$ et traiter quelques exemples.

Exemple 1
$(\forall x)\, ax \supset p$

Cette expression peut d'abord s'écrire: $(ax_1 \wedge ax_2) \supset p$. D'autre part nous savons que p peut prendre les valeurs 1 et 0 et nous avons vu que a

peut prendre les valeurs a_1, a_2, a_3 et a_4. Nous avons donc à étudier $2 \times 4 = 8$ éventualités.

p	1	1	1	1	0	0	0	0
a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	a_2	a_3	a_4
ax_1	1	1	0	0	1	1	0	0
ax_2	1	0	1	0	1	0	1	0
$ax_1 \wedge ax_2$	1	0	0	0	1	0	0	0
Proposition	1	1	1	1	0	1	1	1

Les lignes ax_1 et ax_2 ont été lues sur la table de la page 41. La dernière ligne de ce tableau montre que la proposition $(\forall x)ax \supset p$ est vraie sur un domaine à deux éléments, sauf si l'on a: $val\ (p) = 0$, et $val\ (a) = a_1$.

Exemple 2
$(\forall x)\ (ax \supset p)$
Cette expression peut s'écrire:
$(ax_1 \supset p) \wedge (ax_2 \supset p)$ et l'on aura:

p	1	1	1	1	0	0	0	0
a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	a_2	a_3	a_4
ax_1	1	1	0	0	1	1	0	0
$ax_1 \supset p$	1	1	1	1	0	0	1	1
ax_2	1	0	1	0	1	0	1	0
$ax_2 \supset p$	1	1	1	1	0	1	0	1
Proposition	1	1	1	1	0	0	0	1

Sur un domaine à deux éléments, cette proposition est vraie sauf si $val\ (p) = 0$ en même temps que $val\ (a) = a_1$ ou $val\ (a) = a_2$ ou $val\ (a) = a_3$.

Remarque
La comparaison des exemples 1 et 2 montre qu'il importe de bien marquer le *champ* des quantificateurs, même si certaines des expressions de ce champ ne contiennent pas de variable d'objets, ce qui est le cas de *p*.

Exemple 3
$(\exists x)(\forall y)rxy$

Cette expression est de la forme $(\exists x)\ A(x)$ où $A(x)$ désigne $(\forall y)rxy$. On pourra donc écrire déjà:
$A(x_1) \vee A(x_2)$, soit $(\forall y)rx_1y \vee (\forall y)rx_2y$. Ensuite, puisque y est aussi une variable sur Ω, on aura:
$(\forall y)rx_1y \leftrightarrow rx_1x_1 \wedge rx_1x_2$ et $(\forall y)rx_2y \leftrightarrow rx_2x_1 \wedge rx_2x_2$.
L'expression donnée devient donc finalement:
$(rx_1x_1 \wedge rx_1x_2) \vee (rx_2x_1 \wedge rx_2x_2)$.
Comme nous savons que la variable r peut prendre 16 valeurs et que pour chacune d'elles nous connaissons la valeur de la proposition rx_iy_j (V. p. 41,) il est facile d'évaluer la proposition donnée $(\exists x)\ (\forall y)rxy$. Contentons-nous de deux exemples:
$val\ (r) = r_1$, alors $val\ (rx_1x_1) = val\ (rx_1x_2) =$
$val\ (rx_2x_1) = val\ (rx_2x_2) = 1$ et la proposition est vraie.
$val\ (r) = r_8$, alors $val\ (rx_1x_1) = val\ (rx_2x_2) = 0$
$val\ (rx_1x_2) = val\ (rx_2x_1) = 1$. On a donc:
$val\ (rx_1x_1 \wedge rx_1x_2) = val\ (rx_2\ x_1 \wedge rx_2x_2) = 0$
et la disjonction, qui est équivalente à la proposition donnée est fausse.

Passons maintenant aux expressions ouvertes qui sont des fonctions propositionnelles et ne sont donc ni vraies ni fausses. Notons cependant qu'elles deviennent des propositions si leurs variables libres prennent des valeurs dans Ω, ce qui permet de raisonner comme suit.

Exemple 4
$ax \supset p$

Nous savons déjà que p peut prendre les deux valeurs 1 et 0 et a les quatre valeurs a_1, a_2, a_3 et a_4. Quant à x, c'est une variable sur Ω et elle peut prendre en conséquence les deux valeurs x_1 et x_2. Nous aurons donc finalement à considérer $2 \times 4 \times 2 = 16$ éventualités.

p	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
a	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3	a_4	a_4	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3	a_4	a_4
x	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
ax	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
$ax \supset p$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1

Rien n'empêche évidemment que, sur un domaine donné, une expression ait toujours la valeur 1.

Exemple 5
$(\forall x)ax \supset ay$

Ici a peut prendre les quatre valeurs a_1, a_2, a_3 et a_4 et y les deux valeurs x_1 et x_2.

Comme l'expression peut s'écrire $(ax_1 \wedge ax_2) \supset ay$, on aura:

a	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3	a_4	a_4
y	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
ax_1	1	1	1	1	0	0	0	0
ax_2	1	1	0	0	1	1	0	0
$ax_1 \wedge ax_2$	1	1	0	0	0	0	0	0
ay	1	1	1	0	0	1	0	0
Expression	1	1	1	1	1	1	1	1

On dit qu'une telle expression est *valide dans* Ω.

Remarque
On peut toujours écrire la *fermeture universelle* d'une expression ouverte, c'est-à-dire la faire précéder de quantificateurs universels au nom des variables libres qu'elle contient. Comme nous le savons (I, p. 71) l'ordre dans lequel procéder est indifférent. Le fait à signaler est alors le suivant: Si une expression ouverte est valide dans Ω, sa fermeture universelle l'est aussi et réciproquement.

Nous voulons toutefois construire une logique qui ne conduise pas à spécifier les domaines choisis, de telle sorte que ses lois soient valables en toutes circonstances. Nous poserons pour cela:

Définition. Une expression de la logique des prédicats est *valide* si son évaluation ne contient que des 1 *pour tout domaine* Ω *non vide.*

Il est malheureusement bien clair qu'une telle définition reste « théorique », en ce sens que parmi tous les domaines, il peut s'en trouver qui ne sont pas finis. Il est donc pratiquement impossible de s'assurer par le calcul de

tables de la validité d'une expression. Toutefois, cette définition peut au moins servir parfois négativement.

Exemple

L'expression $(\exists x)ax \supset (\ \ x)ax$ n'est pas valide.

Il suffit en effet de trouver un domaine dans lequel elle ne soit pas valide et, pour cela, une attribution de valeurs aux variables qui rend l'expression fausse. Essayons $\Omega = \text{df } \{x_1, x_2\}$.
L'expression devient:
$(ax_1 \vee ax_2) \supset (ax_1 \wedge ax_2)$.
Si l'on choisit $val\ (a) = a_2$, on aura:
$val\ (ax_1) = 1$ et $val\ (ax_2) = 0$. Donc:
$val\ (ax_1 \vee ax_2) = 1$, $val\ (ax_1 \wedge ax_2) = 0$ et la conditionnelle est fausse.

Remarque

Une expression qui n'est pas valide (dans tout domaine) peut parfaitement être valide dans certains domaines particuliers. Ainsi l'expression ci-dessus est valide dans $\Omega = \text{df } \{x_1\}$.

La variable a peut en effet prendre les deux valeurs a_1 et a_2:

x	a_1x	a_2x
x_1	1	0

Quant à l'expression $(\exists x)ax \supset (\forall x)ax$, elle peut s'écrire: $ax_1 \supset ax_1$ et elle est vraie aussi bien si $val\ (a) = a_1$ que si $val\ (a) = a_2$.

Si les tables qui permettraient de s'assurer de la validité d'une expression sont incalculables, il est parfois possible de recourir au raisonnement pour s'assurer de la validité (générale) d'une expression.

Exemple 1

Nous allons montrer que $(\forall x)ax \supset ay$ est valide, non seulement sur un domaine à deux éléments, mais sur tout domaine.

Soit Ω un domaine non vide *quelconque* et soit a_i une *quelconque* des valeurs que peut prendre a. L'expression $(\forall x)a_ix \supset a_iy$ est une proposition conditionnelle.

1er *cas*: $(\forall x)a_ix$ est une proposition vraie. Cela signifie que tous les éléments de Ω ont la propriété a_i. Il s'ensuit que, quelle que soit la valeur que prendra y, a_iy sera vraie. La conditionnelle sera aussi vraie.

2e cas: $(\forall x)a_i x$ est une proposition fausse. On sait alors que la conditionnelle est vraie, indépendamment de la valeur de son conséquent.

Exemple 2
Montrons que $(\forall x)(p \supset ax) \supset (p \supset (\forall x)ax)$). Nous allons raisonner de nouveau sur un domaine non vide quelconque et avec une des valeurs quelconques a_i.

1er *cas*: $(\forall x)(p \supset a_i x)$ est vraie.

1er sous-cas: p est vraie. Comme $p \supset a_i x$ doit être vraie, cela signifie que $a_i x$ est vraie quelle que soit la valeur que prend x. En d'autres termes $(\forall x)ax$ est vraie. Alors $p \supset (\forall x)ax$ est vraie et la proposition donnée l'est aussi.

2e sous-cas: p est fausse. Dans ces conditions, $p \supset (\forall x)ax$ est vraie, indépendamment de la valeur de $(\forall x)ax$ et la proposition donnée est encore vraie.

2e cas: $(\forall x)(p \supset a_i x)$ est fausse.

La proposition donnée a son antécédent faux et elle est donc vraie indépendamment de la valeur de son conséquent.

Il est même possible de raisonner sur des schémas d'expressions. Montrons, par exemple, que si A est un schéma valide, alors $(\forall X)A$ est aussi un schéma valide.

1er cas: A ne contient pas X libre.

$(\forall X)$ n'a alors aucun effet sur A et le théorème est trivial.

Exemple
$A = \text{df}\, p \supset p$ et $X = \text{df}\, x$
$(\forall X)A = \text{df}\, (\forall x)(p \supset p)$

2e cas: A contient X libre.

Dire que A est valide, c'est dire que pour tout choix de Ω, pour tout choix des valeurs de ses variables de prédicats, pour tout choix de ses variables d'objets et pour tout choix de ses variables de propositions (1 ou 0), A est vraie. En particulier donc, A est vraie quel que soit l'élément de Ω attribué à la variable X. On a donc bien que $(\forall X)A$ est valide.

2.3 Une axiomatisation de la logique des prédicats

Nous avons insisté plus haut sur le fait qu'un système formel était indépendant de ses interprétations. Il est toutefois évident que, si l'on posait arbitrairement n'importe quels ensembles de signes et de règles, on n'aurait

que bien peu de chances de pouvoir ensuite interpréter le système de façon intéressante. En d'autres termes, il convient d'user de la liberté dont on dispose en la matière pour ne choisir que ce qui pourra être utile au propos envisagé. En particulier ici, il faudra tenir compte de ce que la logique des prédicats doit contenir celle des propositions.

Cela conduit à se donner l'*alphabet* suivant:

1) Les lettres p_1, p_2, ..., p_n, ..., que nous appellerons des *variables de propositions*.
2) Les lettres x_1, x_2, ..., x_n, ..., que nous appellerons des *variables d'objets*.
3) Les lettres a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1, ...; a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2, ...; a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k; ... Nous appellerons *variables de prédicats* à k places les lettres a_i^k.
4) Les signes $\sim$ et $\supset$, que nous appellerons des *foncteurs*.
5) Le signe $\forall$ que nous appellerons le *quantificateur universel*.
6) Les signes (et) ou *parenthèses*.

Les *expressions bien formées* ou ebf sont alors données par la définition inductive suivante:

1) Une variable de propositions est une ebf.
2) Si A est une variable de prédicats à k places et si X_1, X_2, ... X_k sont k variables d'objets, $AX_1X_2 \ldots X_k$ est une ebf.
3) - 4) Si A et B sont des ebf, alors $\sim A$ et $(A \supset B)$ sont des ebf.
5) Si A est une ebf, et si X est une variable d'objet, alors $(\forall X)A$ est une ebf.
6) Rien n'est une ebf, sinon par (1) - (5).

Voici quelques exemples d'ebf, dans lesquelles pour éviter les indices, nous avons posé :

$p = \text{df } p_1$, $x = \text{df } x_1$, $y = \text{df } x_2$, $z = \text{df } x_3$, $a = \text{df } a_1^1$
$b = \text{df } a_2^1$, $r = \text{df } a_1^2$, $s = \text{df } a_2^2$, et $t = \text{df } a_1^3$.
p, $(\forall y)p$, ax, bx, $\sim bx$, $(p \supset \sim bx)$, $(\forall x)(p \supset \sim bx)$,
rxy, $(ax \supset rxy)$, $(\forall x)(ax \supset rxy)$, $txyz$,
$(\forall z)txyz$, $(\forall y)(\forall z)txyz$, $\sim (\forall y)(\forall z)txyz$,
$(\forall x) \sim (\forall y)(\forall z)txyz$, $\sim (\forall x) \sim bx$, etc.

Remarques

1. La signification de A n'est pas la même dans la clause (2) et dans les clauses (3) et (4). Cela est sans inconvénients, puisqu'elle y est chaque fois explicitée.

2. Les lettres x_i et a_i^k ne représentent plus ici des constantes mais des variables. Ceci est aussi sans inconvénient. Nous avions bien spécifié, en effet, que notre système ne contiendrait pas de constantes (V. cependant 2.5) et que celles-ci ne nous serviraient qu'à concrétiser nos explications.

3. On notera que l'ebf $(\forall y)p$ s'interprétera comme p (V. p. 47). On n'aura donc guère l'occasion de faire usage de telles expressions. Toutefois, la définition des ebf se compliquerait abusivement, si l'on voulait éviter de les obtenir.

4. La classe des ebf est encore une *classe décidable*.

Nous poserons les mêmes définitions que dans l'axiomatisation de la logique des propositions, mais ici A et B désigneront des ebf quelconques de la logique des prédicats.

$A \vee B = \text{df} \sim A \supset B$

$A \wedge B = \text{df} \sim (\sim A \vee \sim B)$

$A \equiv B = \text{df} \quad (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

De plus:

$(\exists X)A = \text{df} \sim (\forall X) \sim A.$

Enfin nous conviendrons encore de supprimer éventuellement la paire extérieure de parenthèses.

Schémas d'axiomes

Si A, B et C sont des ebf, les cinq expressions suivantes sont des schémas d'axiomes:

(A1) $A \supset (B \supset A)$

(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(A3) $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

(A4) Si dans A, X n'est pas dans le champ d'un quantificateur $(\forall Y)$: $(\forall X)A(X) \supset A(Y)$

(A5) Si A ne contient pas X libre: $(\forall X)(A \supset B) \supset (A \supset (\forall X)B)$

On constate que (A1) à (A3) correspondent aux schémas de la logique des propositions, à ceci près que la classe des ebf est ici élargie. (A4) comporte une notation que nous avons introduite au Fascicule I (p. 49 et 51): l'écriture $A(X)$ signifie que l'ebf A contient la variable X libre et $A(Y)$ représente l'expression A, à ceci près qu'on a substitué partout Y à X.

On obtiendra de nouveau des *axiomes* en spécifiant quelles ebf désignent les majuscules A, B, C et quelles variables désignent les majuscules X et Y.

Exemples

Les expressions suivantes sont des axiomes:

1) $p \supset (q \supset p)$ (A1): A/p, B/q

2) $(\forall x)ax \supset ay$ (A4): X/x, Y/y, $A(X)/ax$

3) $(\forall x)(p \supset ax) \supset (p \supset (\forall x)ax)$ (A5): X/x, A/p, B/ax

On voit que l'axiome 1) est une tautologie et que les axiomes 2) et 3) sont justement des expressions dont nous avons pu nous assurer qu'elles étaient valides. La notion de validité apparaît ainsi comme une extension de celle de tautologie.

Remarque
La restriction sur X dans le schéma (A5) correspond à la condition que Y soit libre pour X dans la règle ∀ **e** et la restriction sur A dans le schéma (A5) correspond aux précautions prises en formulant la règle ∀ **i** (V. I. p. 53).

Il reste enfin à poser les *règles d'inférence*. Nous en introduirons deux, dont la première sera l'analogue de celle de la logique des propositions.

(**R**1) De A et de $A \supset B$, il est loisible d'inférer B.

(**R**2) De A, il est loisible d'inférer $(\forall X)A$.

De là la définition inductive de la classe des *théorèmes*.

1) Un axiome est un théorème.
2) Toute ebf qui résulte de deux théorèmes par la règle (**R**1) est un théorème.
3) Toute ebf qui résulte d'un théorème par la règle (**R**2) est un théorème.
4) Rien n'est un théorème, sinon par (1) - (3).

Remarques
1. Si A est un théorème, nous noterons encore $\vdash A$.
2. La classe des théorèmes, bien qu'introduite par une définition inductive, n'est pas décidable (V. 2.4).

Si l'on compare les ebf, les schémas d'axiomes et les règles de la logique des prédicats et des propositions, on voit immédiatement que tout théorème de la logique des propositions est aussi un théorème de la logique des prédicats. Ceci permet d'abréger considérablement les démonstrations, d'autant plus qu'il est facile de s'assurer qu'une expression est un théorème de la logique des propositions en examinant si c'est une tautologie (Epithéorème 4, 1.7).

Exemple 1
$\vdash (\forall x)(ax \vee \sim ax)$

1. $\sim ax \supset \sim ax$	Log. des prop.
2. $ax \vee \sim ax$	1, df $\vee$
3. $(\forall x)(ax \vee \sim ax)$	2, (**R**2)

Remarque
Cet exemple permet de revenir sur un aspect un peu troublant de la règle (**R**2). Elle pose qu'il est possible de passer de A à $(\forall X)A$ et l'on pourrait

avoir l'impression que si A désigne, par exemple, l'expression naïve « le nombre x est pair », la règle permet d'inférer « tous les nombres sont pairs ». Mais ce serait oublier le cadre dans lequel la règle est placée. Elle figure dans la clause (3) de la définition des théorèmes et son usage est en conséquence limité aux seules expressions dont on sait déjà qu'elles sont des théorèmes. Elle revient à dire que la fermeture d'une expression valide est valide (V. p. 45).

Exemple 2
$\vdash ay \supset (\exists x)ax$
1. $(\forall x) \sim ax \supset \sim ay$ (A4): X/x, Y/y, $A(X)/\sim ax$
2. $((\forall x) \sim ax \supset \sim ay) \supset (ay \supset \sim (\forall x) \sim ax)$ Log. des prop.
3. $ay \supset \sim (\forall x) \sim ax$ 1, 2, (**R**1)
4. $ay \supset (\exists x)ax$ 3, df $\exists$

Les relations d'*implication* ($\rightarrow$) et d'*équivalence* ($\leftrightarrow$) sont toujours définies formellement comme plus haut (V. p. 11). Le signe $\vdash$ a simplement une portée plus large.

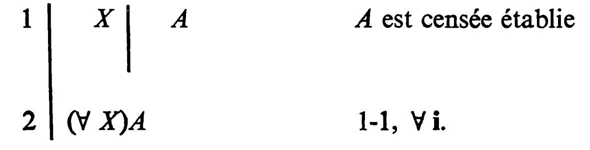
Exemple 3
$\vdash (\forall x)ax \supset (\exists x)ax$
On a: $\vdash (\forall x)ax \supset ay$ (A1): X/x, Y/y, $A(X)/ax$
donc $(\forall x)ax \rightarrow ay$. L'exemple 2 donne $ay \rightarrow (\exists x)ax$
et, par la transitivité de $\rightarrow$, il vient $(\forall x)ax \rightarrow (\exists x)ax$
donc $\vdash (\forall x)ax \supset (\exists x)ax$.

2.4 Quelques propriétés de la logique des prédicats

Nous avons de nouveau affaire à deux notions de théorème, selon qu'on l'entend au sens du premier fascicule $\vdash_1 A$ ou au sens qui précède de $\vdash_2 A$. Ces deux notions toutefois se recouvrent, c'est-à-dire qu'on a:

Epithéorème 1: $\vdash_1 A$ si et seulement si $\vdash_2 A$.

Il est facile de s'assurer que si $\vdash_2 A$, alors $\vdash_1 A$. En effet, tous les schémas d'axiomes sont déductibles par les règles d'introduction et d'élimination. De plus, comme nous l'avons vu, (**R**1) n'est rien d'autre que la règle $\supset$ e. Reste (**R**2), qui s'établit comme suit,



Quant à la réciproque, elle se prouve en montrant qu'il est possible d'obtenir, dans le système actuel, des règles dérivées qui, à la notation près, correspondent aux règles d'introduction et d'élimination. Montrons-le pour la règle $\forall$ **e**. Il est possible de l'écrire: $(\forall X)A(X) \vdash A(Y)$ à condition que Y soit libre pour X. Mais nous avons ici le schéma (A4) $(\forall X)A(X) \supset A(Y)$. Puisque tout axiome est un théorème, tout schéma d'axiomes sera un schéma de théorèmes. Donc on peut poser: $\vdash (\forall X)A(X) \supset A(Y)$ et, si on introduit la prémisse $(\forall X)A(X)$, on peut écrire $(\forall X)A(X) \vdash A(Y)$. Quant à la restriction « X ne doit pas figurer dans le champ d'un quantificateur $(\forall Y)$ », elle équivaut tout justement à réclamer que Y soit libre pour X.

Remarque

Le passage de $\vdash (\forall X)A(X) \supset A(Y)$ à $(\forall X)A(X) \vdash A(Y)$, intuitivement acceptable, fait en toute rigueur l'objet d'un épithéorème fondamental, connu sous le nom de « théorème de la déduction ». Nous renonçons à en esquisser la preuve.

Pour étudier la consistance et la non-contradiction du système, nous allons recourir à un domaine Ω particulier, celui qui ne contient qu'un élément. Si l'on peut montrer alors que, sur ce domaine, il est exclu que toute ebf soit un théorème, nous aurons aussi montré qu'il est impossible que cette ebf soit un théorème dans *tout* domaine.

Si Ω n'a qu'un seul élément x_1, on peut, sans perte d'information remplacer toutes les expressions de la forme ay et $(\forall x)ax$ par a. En effet ay ne peut, comme $(\forall x)ax$, que donner l'expression ax_1, expression qui, pour les deux valeurs que peut prendre a (V. p. 46) sera soit vraie, soit fausse. Introduisons donc la transformation t suivante:

Si A est une ebf, alors:

Si A ne contient que des variables de propositions, $t(A) = \text{df } A$,
sinon $t(A)$ est l'expression obtenue, à partir de A, en supprimant les variables d'objets, les quantificateurs et les parenthèses qui les entourent.

Exemples

$t(ax) = a,\ t(bx) = b,$
$t((\forall x)ax) = a;\ t(\sim (\forall x)ax) = \sim a$
$t(ax \supset by) = a \supset b;\ t((\forall x) \sim rxy) = \sim r.$
On constate que: $t(\sim A) = \sim t(A)$
et que: $t(A \supset B) = t(A) \supset t(B)$.

Dans ces conditions, on peut établir l'épithéorème suivant:

Epithéorème 2. Si $\vdash A$ alors $t(A)$ est une tautologie.

Si l'on applique, en effet, la transformation t aux schémas d'axiomes, on obtiendra des schémas de tautologies.

Exemples

1) $t(A \supset (B \supset A)) = t(A) \supset t(B \supset A) = t(A) \supset (t(B) \supset t(A))$.

Mais, par définition de t, $t(A)$ et $t(B)$ conduisent à des expressions vraies ou fausses. Et on aura:

$t(A)$	1	1	0	0
$t(B)$	1	0	1	0
$t(B) \supset t(A)$	1	1	0	1
Expression	1	1	1	1

2) $t((\forall X)A(X) \supset A(Y)) = t((\forall X)A(X)) \supset t(A(Y))$

$= t(A) \supset t(A)$ qui est aussi un schéma de tautologie.

Quant aux règles, appliquées à des tautologies, elles redonnent des tautologies. Nous le savons déjà pour (**R**1). Quant à (**R**2), on a:

Si $t(A)$ est une tautologie, alors $t((\forall X)A)$ est une tautologie, puisque $t((\forall X)A) = t(A)$.

Corollaire 1. La logique des prédicats est consistante. En effet, l'expression $(\forall x) \sim (ax \supset ax)$ n'est pas un théorème. On a: $t((\forall x) \sim (ax \supset ax)) = \sim (a \supset a)$ qui n'est pas une tautologie. Le corollaire est établi par contraposition de l'épithéorème 2.

Corollaire 2. La logique des prédicats est non contradictoire.

Si on a, en effet $\vdash A$, alors $t(A)$ est une tautologie par l'épithéorème et $\sim t(A)$ n'en est pas une. Or $\sim t(A) = t(\sim A)$ et, par la contraposée de l'épithéorème $\sim\vdash \sim A$.

Le problème de la complétude est plus complexe.

Epithéorème 3a. La logique des prédicats n'est pas complète au sens fort.

Il faut montrer qu'il est possible de trouver un schéma d'ebf qui n'est pas un schéma de théorème et qui, ajouté à (**A**1) - (**A**5) ne rend pas le système inconsistant.

$(\exists X)A(X) \supset (\forall X)A(X)$ est un tel schéma.

Nous avons vu plus haut que, si l'expression, $(\exists x)ax \supset (\forall x)ax$ était valide dans $\Omega = \text{df } \{x_1\}$, elle ne l'était pas dans $\Omega = \text{df } \{x_1, x_2\}$ (v.p. 46). On peut s'assurer par ailleurs que, dans un domaine à deux éléments, les

schémas d'axiomes (A1) - (A5) engendrent des tautologies et que les règles (R1) - (R2) conservent cette propriété. Il s'ensuit que $(\exists X)A(X) \supset (\forall X)A(X)$ n'est pas démontrable dans $\Omega = \{x_1, x_2\}$. Si maintenant on ajoute ce schéma à (A1) - (A5), on ne rendra pas le système inconsistant, puisque $t((\exists X)A(X) \supset (\forall X)A(X)) = A \supset A$ et que nous avons ici une tautologie.

Remarque
Ce genre de raisonnement peut, à première vue, donner l'impression d'être vicieux. En fait, il repose sur ce que Ω est toujours indéterminé et que, ajouter ce nouveau schéma d'axiomes, revient finalement à choisir un domaine à un seul individu. Une telle logique des prédicats n'aurait plus aucun intérêt: elle se confondrait avec celle des propositions, mais elle serait consistante, ce qui est tout ce qui nous intéresse ici.

Epithéorème 3b. La logique des prédicats est complète au sens faible.

Il s'agit de montrer que si A est valide, alors $\vdash A$. La preuve dépasse le cadre de cet ouvrage. Sa démarche cependant est la suivante:

1. On introduit, pour les expressions de la logique des prédicats, une forme normale dite de SKOLEM (FNS).
2. On montre que, quelle que soit l'ebf A, il existe une FNS, disons A^* et telle que $\vdash A$ si et seulement si $\vdash A^*$.
3. On prouve ensuite que si A^* est valide, alors on sait démontrer A^*, donc que $\vdash A^*$.
4. Il découle alors de 2 et 3 que $\vdash A$.

Remarque
Les épithéorèmes 3a et 3b justifient les expressions « complet au sens fort » et « complet au sens faible ».

Le problème de la décidabilité est résolu par l'épithéorème suivant, dont la démonstration requiert des moyens assez complexes.

Epithéorème 4. La logique des prédicats n'est pas décidable.

Cela signifie donc que, si l'on se donne une ebf *quelconque* A, on ne peut pas être certain de trouver un algorithme qui permette de décider si A est ou n'est pas un théorème. Cela ne veut toutefois pas dire qu'il n'existe pas certaines classes d'ebf pour lesquelles il soit possible de décrire un algorithme de décision. La plus intéressante est celle des ebf qui ne contiennent que des variables de propositions et des variables de prédicats à une seule place.

Remarque
Il ne faut pas se faire trop d'illusions sur le caractère pratique de l'algorithme de décision dont il vient d'être question. Entre un nombre fini d'opérations à effectuer et un nombre commode à manipuler — et même manipulable — il y a souvent une différence non négligeable! La preuve de l'existence d'un algorithme a davantage un intérêt théorique qu'utilitaire. Elle montre, en effet, une différence essentielle entre la logique des prédicats à une mention d'objet (la logique des propriétés), et celle des prédicats à plus d'une mention d'objet (la logique des relations).

2.5 La relation d'identité

Comme nous l'avons déjà fait au fascicule I, nous allons introduire la *relation d'identité* $=$. Il faut remarquer que, ce faisant, nous modifions de deux façons la logique des prédicats. D'une part nous l'élargissons en y introduisant de nouvelles ebf et d'autre part nous en changeons le caractère, puisque nous acceptons d'y faire figurer une constante de relation. Nous la définirons comme suit:

$val\,(x = y) = 1$ si $val\,(x) = val\,(y)$
$val\,(x = y) = 0$ sinon.

Ceci permet d'étendre la notion de validité dans un domaine et, par là, celle de validité en général. Montrons, par exemple, que $(x = y \wedge ax) \supset ay$ est valide dans $\Omega = \text{df}\, \{x_1, x_2\}$. On se souvient que la variable de prédicat a peut prendre quatre valeurs a_1, a_2, a_3, a_4 et que les valeurs des propositions $a_i x$, sont connues (v. p. 41). On aura alors:

a	a_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3	a_3	a_4	a_4	a_4	a_4
x	x_1	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2
y	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
$x = y$	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
ax	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$x = y \wedge ax$	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ay	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Expression	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Une fois convenablement élargis l'alphabet et la classe des ebf — ce dans le détail de quoi nous n'entrerons pas — il faut encore poser des schémas d'axiomes nouveaux. Il est évidemment possible d'obtenir des théorèmes qui contiennent l'identité en n'utilisant que les schémas (A1) - (A5).

Exemple

1. $(\forall x)(\forall y)(x = y) \supset (\forall y)(u = y)$
   (A4): X/x, Y/u, $A(X)/(\forall y)(x = y)$
2. $(\forall y)(u = y) \supset (u = v)$ (A4): X/y, Y/v, $A(X)/u = y$
3. $(\forall x)(\forall y)(x = y) \supset (u = v)$ 1,2, transitivité de $\rightarrow$.

Mais un tel théorème ne fait appel à aucune propriété spécifique de $=$ et l'on pourrait sans autre l'établir avec une variable de relations **r**.

Le rôle pratique de la relation d'identité est de permettre de remplacer y par x et x par y dès que $x = y$. Si nous convenons de nouveau d'écrire $A[Y]$ pour désigner le résultat du remplacement de X par Y dans l'expression $A(X)$ qui contient X (v. I, p. 56), on pourra poser à cet effet le schéma d'axiomes:

(I1) $((X = Y) \wedge A(X)) \supset A[Y]$

Remarque

La différence entre *substituer* et *remplacer* est donc que dans la substitution il faut changer toutes les mentions de la variable (si changement il y a), tandis que dans le remplacement, on peut changer une ou plusieurs mentions, à choix. Ces deux opérations sont néanmoins liées entre elles, comme le fait voir l'exemple suivant:

Soit $A(x) = \text{df}\ (x = x) \vee (x = z)$. $A(y)$ va représenter la substitution de y à x dans A, donc:

$A(y) = \text{df}\ (y = y) \vee (y = z)$.

Quant au remplacement, noté donc $A[y]$, ce sera l'une des expressions:

$(y = x) \vee (x = z)$, $(x = y) \vee (x = z)$, $(x = x) \vee (y = z)$,
$(y = y) \vee (x = z)$, $(y = x) \vee (y = z)$, $(x = y) \vee (y = z)$,
$(y = y) \vee (y = z)$.

On constate déjà qu'un remplacement peut être une substitution. Mais il y a davantage: la substitution de x à y dans $A[y]$ redonne toujours $A(x)$.

Comme on veut aussi que la relation d'identité soit une relation d'équivalence, on posera encore:

(I2) $X = X$.

Exemple de théorème $\vdash (\forall x)(\forall y)(x = y \supset y = x)$

Posons $A(X) = \text{df}\ x = x$ et décidons que Y désigne y.

(**I**1) donne: 1. $(x = y \wedge x = x) \supset (y = x)$.
Nous avons remplacé par y la première mention de x seulement dans $A(X) = \text{df } x = x$.

La logique des propositions permet de passer de 1 à:

2. $(x = x) \supset (x = y \supset y = x)$

(**I**2) donne:

3. $x = x$

et (**R**1) appliquée à 3 et 2 donne:

4. $x = y \supset y = x$

Une double application de (**R**2) conduit à:

5. $(\forall y)(x = y \supset y = x)$ et
6. $(\forall x)(\forall y)(x = y \supset y = x)$.

L'un des intérêts de la relation $=$ est qu'elle permet de formaliser des notions comme *un et un seul*, *au plus un*, *au moins deux*, *au plus deux*, *deux et seulement deux*, etc. En effet, l'interprétation de $(\exists x)ax$ est « il y a au moins un x tel que a ». Dire dès lors qu'il y a un et un seul x tel que a, c'est dire que

1) il existe au moins un x tel que a,
2) quel que soit y, si y a la propriété a alors $y = x$.

D'où en notant $\exists_1$ l'existence d'un unique objet,
$(\exists_1 x)ax = \text{df } (\exists x)(ax \wedge (\forall y)(ay \supset y = x))$
Considérons l'expression: $(\forall x)(\forall y)((ax \wedge ay) \supset x = y)$.
Elle est vraie dans deux cas:

1) S'il existe un seul x tel que a.
2) S'il n'existe aucun x qui est a. Dans ce cas, en effet, l'antécédent $ax \wedge ay$ est faux et la conditionnelle est vraie. L'expression signifie donc: « il y a au plus un x tel que a ».

Tout ceci se généralise sans peine. Nous écrirons $x \neq y$ pour $\sim (x = y)$ et $\exists_2$, $\exists_3$, etc. pour « exactement deux », « exactement trois », etc. On a alors:

$(\exists_2 x)ax = \text{df}(\exists x)(\exists y)(ax \wedge ay \wedge x \neq y \wedge (\forall z)(az \supset (z = x \vee z = y)))$

$(\exists_3 x)ax = \text{df}(\exists x)(\exists y)(\exists z)(ax \wedge ay \wedge az \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge (\forall u)(au \supset (u = x \vee u = y \vee u = z)))$

Un peu de réflexion montre que $(\exists x)(\exists y)(ax \wedge ay \wedge x \neq y)$ signifie « il y a au moins deux objets qui sont a » et que $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((ax \wedge ay \wedge az) \supset (x = y \vee x = z \vee y = z))$ signifie « il y a au plus deux objets qui sont a ».

2.6 Aperçu sur les classes et les relations

Sans chercher à axiomatiser la logique des classes et celle des relations, nous allons toutefois examiner un certain nombre des notions que l'on y rencontre.

Partons du domaine $\Omega = \text{df}\ \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et considérons le prédicat $a_1 = \text{df}$ être pair, prédicat que nous écrirons simplement a pour ne pas nous encombrer d'indices. On a:
$val\,(a2) = val\,(a4) = 1$ et $val\,(a1) = val\,(a3) = val\,(a5) = 0$.
Le prédicat effectue donc une partition des éléments de Ω en deux classes: 1) celle des éléments x qui rendent la fonction propositionnelle ax vraie, 2) celle des autres éléments.
Conformément à l'usage mathématique, nous désignons par $\{x\,|ax\}$ la première classe, ce qu'on peut lire « les x, tels que x est pair » et, plus généralement « les x, tels que ax ».

Remarques
1. La variable x qui figure dans l'expression $\{x\,|ax\}$ est une variable liée. Cela signifie que les notations $\{x\,|ax\}$, $\{y\,|ay\}$, $\{z\,|az\}$, etc. désignent la même classe, qui n'est rien d'autre que l'extension du prédicat a.

2. Les accolades et la barre verticale constituent ici un symbole unique et il ne faut donc pas les traiter séparément. Certains auteurs écrivent d'ailleurs $\hat{x}\,ax$ pour $\{x\,|ax\}$.

Soit x_1 un élément de Ω. Il est donc équivalent de dire que x_1 est a et de dire que x_1 est élément de la classe des éléments tels que a. On peut alors écrire:
$ax_1 \leftrightarrow x_1 \in \{y|ay\}$.
D'une façon générale nous poserons:
(c1) $\vdash (\forall\, x)\,(ax \equiv x \in \{y\,|ay\})$

Désignons par α, β, γ, ... les classes ainsi associées à des prédicats à une place. Il est possible de constituer un calcul de ces classes de la façon suivante. Définissons d'abord deux relations entre classes:
inclusion: $\alpha \subseteq \beta = \text{df}\ \ (\forall\, x)\,(x \in \alpha \supset x \in \beta)$
égalité: $\alpha = \beta = \text{df}\ \ (\forall\, x)\,(x \in \alpha \equiv x \in \beta)$

Remarques
1. Le signe =, placé entre deux classes ne doit pas être confondu avec celui que l'on place entre deux variables d'objets ni avec celui utilisé à

propos des applications *val* et des transformations. Tous représentent des relations d'équivalence, mais celles-ci n'en sont pas moins distinctes.

2. A un prédicat donné a correspond une classe et une seule, mais à deux prédicats distincts peut correspondre la même classe (la même extension). Soit par exemple $ax =$ df x est un triangle équilatéral et $bx =$ df x est un triangle équiangle. C'est un théorème de géométrie élémentaire que:

$(\forall x)\ (ax = bx)$

Il s'ensuit que si $\alpha =$ df $\{x\,|ax\}$ et $\beta =$ df $\{x\,|bx\}$, on aura:

$(\forall x)\ (x \in \alpha \equiv x \in \beta)$

et, par la définition de l'égalité entre classes: $\alpha = \beta$.

Soit $\alpha =$ df $\{x\,|ax\}$ et $\beta =$ df $\{x\,|bx\}$. Nous pouvons introduire les opérations usuelles de la façon suivante:

union: $\alpha \cup \beta =$ df $\{x\,|ax \vee bx\}$
intersection: $\alpha \cap \beta =$ df $\{x\,|ax \wedge bx\}$
complément relatif: $C_\beta\alpha =$ df $\{x|bx \wedge \sim ax\}$
complément (*absolu*): $\bar{\alpha} =$ df $\{x|\sim ax\}$

Comme on le voit, (**c**1) permet de ramener le calcul sur les classes à la logique des prédicats. Montrons-le sur un exemple, en utilisant les règles de déduction du Fascicule I, plus commodes que les schémas d'axiomes.

Exemple

$\vdash (\alpha \cap \beta = \alpha) \equiv (\alpha \subseteq \beta)$

Par définitions de $=$ et de $\subseteq$, il faut prouver:

$\vdash (\forall x)\ (x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha) \equiv (\forall x)\ (x \in \alpha \supset x \in \beta)$

On a d'abord de gauche à droite:

1	$(\forall x)\ (x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha)$	**hyp**
2	x $x \in \alpha$	**hyp**
3	— $(\forall x)\ (x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha)$	1, **reit** (x est liée)
4	$x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha$	3, $\forall$ **e**
5	$x \in \alpha \supset x \in \alpha \cap \beta$	4, rep **df** $\equiv$, $\wedge$ **e**
6	$x \in \alpha \cap \beta$	2, 5, $\supset$ **e**
7	$x \in \alpha \wedge x \in \beta$	6, **rep** df $\cap$
8	$x \in \beta$	7, $\wedge$ **e**
9	$x \in \alpha \supset x \in \beta$	2 - 8, $\supset$**i**
10	$(\forall x)\ (x \in \alpha \supset x \in \beta)$	2 - 9, $\forall$**i**

On a ensuite de droite à gauche:

1	$(\forall x)\ (x \in \alpha \supset x \in \beta)$	**hyp**
2	x $x \in \alpha \cap \beta$	**hyp** ($\equiv$ de gauche à droite)
3	$x \in \alpha \wedge x \in \beta$	2, **rep df** $\cap$
4	$x \in \alpha$	3, $\wedge$ **e**
5	$x \in \alpha \cap \beta \supset x \in \alpha$	2 - 4, $\supset$**i**
6	$x \in \alpha$	**hyp** ($\equiv$ de droite à gauche)
7	$(\forall x)\ (x \in \alpha \supset x \in \beta)$	1, **reit** (x est liée)
8	$x \in \alpha \supset x \in \beta$	7, $\forall$ **e**
9	$x \in \beta$	6, 8, $\supset$**e**
10	$x \in \alpha \wedge x \in \beta$	6, 9, $\wedge$**i**
11	$x \in \alpha \cap \beta$	10, **rep df** $\cap$
12	$x \in \alpha \supset x \in \alpha \cap \beta$	6 - 11, $\supset$**i**
13	$x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha$	5, 12, $\wedge$**i**, **rep df** $\equiv$
14	$(\forall x)\ (x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha)$	2 - 13, $\forall$**i**

Introduisons les trois classes suivantes:
classe vide: $\Lambda = \text{df}\ \{x \mid x \neq x\}$
classe totale: $V = \text{df}\ \overline{\Lambda}$
classe singulière: $\{x\} = \text{df}\ \{y \mid y = x\}$

La classe Λ est bien la classe vide, en ce sens que l'on a $\vdash\ \sim (\exists\, x)\ (x \in \Lambda)$, c'est-à-dire que la classe Λ n'a pas d'élément. Pour le montrer, notons d'abord que l'on peut écrire $\Lambda = \text{df}\ \{y \mid y \neq y\}$ et que, au lieu de $x \in \Lambda$, on aura $x \in \{y \mid y \neq y\}$.

Or, par (**c**1), ceci équivaut à $x \neq x$ (Le prédicat *a* de (**c**1) est en effet ici « être non identique à »). Dès lors:

1	$(\exists\, x)\ (x \in \Lambda)$	**hyp** (raisonnement par l'absurde)
2	$(\exists\, x)\ (x \neq x)$	1, **rep df** Λ et (**c**1)
3	x $x \neq x$	**hyp** (pour la règle $\exists$ **e**)
4	$x = x$	$=$ **i**
5	$\sim (\exists\, x)\ (x \neq x)$	3, 4, $\sim$ **e**
6	$\sim (\exists\, x)\ (x \neq x)$	2, 3 - 5, $\exists$ **e**
7	$(\exists\, x)\ (x \neq x)$	2, **rep**
8	$\sim (\exists\, x)\ (x \in \Lambda)$	1, 6, 7, $\sim$**i**

Ceci permet d'établir le théorème fondamental que la classe vide est incluse dans toute classe:

$\vdash \Lambda \subseteq \alpha$

Il faut prouver, selon la définition de $\subseteq$ que:

$\vdash (\forall x)\,(x \in \Lambda \supset x \in \alpha)$

On aura:

1	x | | $x \in \Lambda$	**hyp**
2	| | $(\exists x)\,(x \in \Lambda)$	1, $\exists$ **i**
3	| | $\sim (\exists x)\,(x \in \Lambda)$	théorème précédent
4	| | $x \in \alpha$	2, 3, $\sim$**e**
5	| $x \in \Lambda \supset x \in \alpha$	1 - 4, $\supset$**i**
6	$(\forall x)\,(x \in \Lambda \supset x \in \alpha)$	1 - 5, $\forall$ **i**

Quant à la classe singulière, elle permet de bien distinguer les signes $\in$ et $\subseteq$. On a en effet:

$\vdash x \in \alpha \equiv \{x\} \subseteq \alpha,$

soit: si x est élément de α, alors la classe qui ne contient que l'élément x est incluse dans α.

Montrons d'abord que $\vdash x \in \alpha \supset \{x\} \subseteq \alpha$ soit encore que $\vdash x \in \alpha \supset (\forall z)\,(z \in \{x\} \supset z \in \alpha)$:

1	$x \in \alpha$	**hyp**
2	z | | $z \in \{x\}$	**hyp**
	| | $z \in \{y \mid y = x\}$	2, **rep df** $\{x\}$
4	| | $z = x$	3, (**c**1)
5	| | $x \in \alpha$	1, **reit** (ne contient pas z libre)
6	| | $z \in \alpha$	4, 5, $=$ **e**
7	| $z \in \{x\} \supset z \in \alpha$	2 - 6, $\supset$**i**
8	$(\forall z)\,(z \in \{x\} \supset z \in \alpha)$	2 - 7, $\forall$**i**

Montrons ensuite la réciproque $\vdash \{x\} \subseteq \alpha \supset x \in \alpha$, soit $\vdash (\forall z)\,(z \in \{x\} \supset z \in \alpha)$. Pour cela remarquons que (**c**1) peut être utilisé non seulement pour éliminer l'écriture $\{.\,|a.\}$, mais aussi pour l'introduire, puisque c'est une biconditionnelle. On aura en particulier en considérant que ***a*** est le prédicat « être identique à x »: $(x = x) \equiv (x \in \{y \mid y = x\})$.

Il vient alors:

1	$(\forall z)\,(z \in \{x\} \supset z \in \alpha)$	**hyp**
2	$x \in \{x\} \supset x \in \alpha$	1, $\forall$ **e** : z/x
3	$x = x$	$=$ **i**
4	$x \in \{y \mid y = x\}$	3, (**c**1)
5	$x \in \{x\}$	4, **rep df** $\{x\}$
6	$x \in \alpha$	2, 5, $\supset$ **e**

Il est tentant de généraliser (**c**1) — ce que nous avons d'ailleurs déjà fait tacitement — en s'autorisant à écrire à la place de la variable de prédicat *a*, une ebf quelconque A, donc en posant:

(C2) $\vdash (\forall X)\,(A(X) \equiv X \in \{Y \mid A(Y)\})$

Une telle libéralité exige toutefois de grandes précautions, comme le fait voir l'exemple suivant.

Posons $A(Y) = \text{df} \sim (y \in y)$ et $\alpha = \text{df}\ \{y \mid \sim (y \in y)\}$
(C2) donnera:
$\vdash (\forall x)\,(\sim (x \in x) \equiv x \in \{y \mid \sim (y \in y)\})$
soit $\vdash (\forall x)\,(\sim (x \in x) \equiv x \in \alpha)$.
Appliquons la règle $\forall$ **e**, en substituant α à la place de x:
On a: $\vdash \sim (\alpha \in \alpha) \equiv \alpha \in \alpha$.
Mais la logique des propositions donne:
$\vdash (\sim P \equiv P) \supset (Q \wedge \sim Q)$
donc: $\vdash (\sim (\alpha \in \alpha) \equiv \alpha \in \alpha) \supset (Q \wedge \sim Q)$
et par (**R**1): $\vdash Q \wedge \sim Q$.

En d'autres termes, si à la fonction propositionnelle $\sim (y \in y)$ correspond une classe, le système est contradictoire. Il s'agit de la fameuse *antinomie de Russell* et c'est pour l'éviter qu'il a introduit la théorie des types. Intuitivement cette théorie stipule que le signe $\in$ ne peut se placer qu'entre des « objets » de types différents, entre une variable d'objets et une variable de classes par exemple, mais pas entre deux variables d'objets. Ainsi $y \in y$, $\sim (y \in y)$ ne seraient tout simplement pas des ebf.

Ce qui précède peut s'étendre aux relations. Reprenons notre domaine $\Omega = \text{df}\ \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et considérons sur lui la relation $<$. Si l'on forme le produit cartésien $\Omega \times \Omega$, on obtient les 25 couples de la table ci-contre. Le sous-ensemble des couples marqués d'une croix correspond à ceux dont le premier est plus petit que le second. Ainsi la classe

	1	2	3	4	5
1		×	×	×	×
2			×	×	×
3				×	×
4					×
5					

$\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$
correspond à la relation $<$: elle est son *extension*.

On est alors conduit à poser:

(**c**3) $\vdash (\forall x)\ (\forall y)\ (rxy \equiv (x, y) \in \{uv \mid ruv\})$.

Remarque

Pour être rigoureux, ceci exigerait de définir la notion de *couple ordonné*, notée ici (x, y). Cela peut se faire de différentes façons. En particulier, si l'on pose $\{x, y\} = \text{df}\ \{z \mid (z = x) \vee (z = y)\}$, on pourra écrire: $(x, y) = \text{df}\ \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Puisque les relations sont ramenées à des classes de couples — donc à des classes —, il est possible de définir les relations d'*inclusion* et d'*égalité*, de même que les opérations d'*union*, d'*intersection* et de *complément*. Soit R et S, des variables de relations, on aura:

$R \subseteq S = \text{df}\ \ (\forall x)\ (\forall y)\ ((x, y) \in R \supset (x, y) \in S)$
$R = S = \text{df}\ \ (\forall x)\ (\forall y)\ ((x, y) \in R \equiv (x, y) \in S)$
$R \cup S = \text{df}\ \ \{xy \mid (x, y) \in R \vee (x, y) \in S\}$
$R \cap S = \text{df}\ \ \{xy \mid (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S\}$
$\bar{R} = \text{df}\ \ \{xy \mid \sim (x, y) \in R\}$

Remarque

Au lieu de l'écriture $(x, y) \in R$, on pourrait faire usage de la notation plus familière rxy. En effet (**c**3) exprime que rxy est équivalent à $(x, y) \in \{uv \mid ruv\}$ ou, si l'on pose $R = \text{df}\ \{uv \mid ruv\}$, à $(x, y) \in R$. Dans ce qui suit, nous nous en tiendrons à la notation habituelle.

Il existe aussi des opérations propres aux relations, dont les deux suivantes. Appelons r la relation de parents à enfants, c'est-à-dire que rxy signifiera « x est parent (père ou mère) de y ». On peut alors concevoir la *relation inverse*, c'est-à-dire celle d'enfants à parents. Nous la noterons r^{-1} et nous poserons:

$r^{-1} = \text{df}\ \{xy \mid ryx\}$.

On aura donc par (**c**3):

$\vdash (\forall x)(\forall y)(r^{-1}xy \equiv ryx)$

Remarques

1. Au lieu de relation inverse, certains parlent de relation converse et au lieu de la notation r^{-1} on rencontre souvent r.

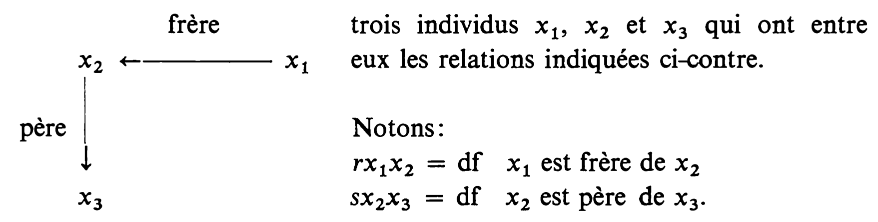
2. Soit la phrase « Roméo aime Juliette ». Représentons « Roméo » par x_1, « Juliette » par x_2 et « aimer » par r et considérons les quatre expressions rx_1x_2, $\bar{r}x_1x_2$, $r^{-1}\,x_1\,x_2$, $\bar{r}^{-1}\,x_1\,x_2$. On a:

rx_1x_2 : Roméo aime Juliette
$\bar{r}x_1x_2$: Roméo n'aime pas Juliette
$r^{-1}x_1x_2$: Juliette aime Roméo, puisque $r^{-1}x_1x_2 \leftrightarrow rx_2x_1$
$\bar{r}^{-1}x_1x_2$: Juliette n'aime pas Roméo
Posons: $\mathbf{N}(rxy) = \bar{r}xy$ $\mathbf{R}(rxy) = r^{-1}xy$
$\mathbf{D} = \mathbf{NR}$ et $\mathbf{I}(rxy) = rxy$.

On voit sans peine que les quatre transformations ainsi introduites forment un groupe isomorphe au groupe **INRD** du paragraphe 1.5.

3. On notera enfin que ce formalisme ne permet pas de distinguer l'actif « Roméo aime Juliette » du passif « Juliette est aimée par Roméo ».

Une seconde opération importante est celle du *produit de relations*. Soient



trois individus x_1, x_2 et x_3 qui ont entre eux les relations indiquées ci-contre.

Notons:
rx_1x_2 = df x_1 est frère de x_2
sx_2x_3 = df x_2 est père de x_3.

Il s'ensuit qu'il existe une relation entre x_1 et x_3, à savoir « x_1 est oncle (paternel) de x_3 ». La relation « être oncle (paternel) de » est ainsi composée des deux relations « être frère de » et « être père de ». Nous noterons $r|s$ cette composition, dite produit et nous poserons:

$r|s = \text{df } \{xy|(\exists z)(rxz \wedge szy)$

On aura donc par (**c**3):

$\vdash (\forall x)(\forall y)((r|s)xy \equiv (\exists z)(rxz \wedge szy))$.

Il faut prendre garde que, en général, le produit de deux relations n'est pas commutatif. Ainsi dans l'exemple ci-dessus « $s|r$ signifie « être père du frère », ce qui est « être père ».

Il est aussi possible de faire le produit d'une relation par elle-même: $s|s$ ce que nous noterons s^2. Par exemple, si sxz = df x est père de z, s^2xy qui équivaut par définition à $(\exists z)(sxz \wedge szy)$ signifiera que x est le grand-père de y.

Remarque

Si r est une relation transitive, si par exemple r est la relation « plus petit que » sur les nombres naturels, on aura quels que soient x, y et z : $(rxy \wedge ryz) \supset rxz$. Puisque l'antécédent de cette conditionnelle est vrai pour tout y, on aura aussi $(\exists y)(rxy \wedge ryz)$. En d'autres termes, on a: $r^2xz \supset rxz$. Et l'on voit que la transitivité, que nous avions définie par la condition:

$\text{Trans}(r) = \text{df} (\forall x) (\forall y) (\forall z) ((rxy \wedge ryz) \supset rxz)$ (v. I, p. 74)
peut maintenant se mettre sous la forme plus simple:

$\text{Trans}(r) = \text{df}\ r^2 \subseteq r.$

L'opération produit de relation est associative, de sorte que l'on peut définir s^3, s^4, etc., sans prendre de précautions de parenthésage.

Notons enfin la loi suivante:

$\vdash (\forall x)(\forall y) ((r|s)^{-1} xy \equiv (s^{-1}|r^{-1})xy).$

Preuve

Pour tout x et pour tout y, on a:

$(r|s)^{-1}xy \equiv (r|s)yx$ par définition de l'inverse
$\equiv (\exists z)(ryz \wedge szx)$ par définition du produit

D'autre part:

$(s^{-1}|r^{-1})xy \equiv (\exists z)(s^{-1}xz \wedge r^{-1}zy)$ par définition du produit
$\equiv (\exists z)(szx \wedge ryz)$ par définition de l'inverse
$\equiv (\exists z)(ryz \wedge szx)$ par la commutativité de $\wedge$

2.7 Quelques notions liées aux classes et aux relations

Nous terminerons ce Fascicule en définissant quelques notions liées aux classes et aux relations. Nous ne prétendons pas en faire la théorie. Nous voulons simplement fournir des éléments qui permettent de lire les textes qui se servent de la logique formelle.

Descriptions

Nous avons vu que l'axiomatisation de la logique des prédicats ne contenait pas de constantes d'objets. Il peut cependant arriver qu'il soit nécessaire de nommer un objet bien déterminé. On utilise pour cela la théorie des descriptions. Supposons que nous voulions introduire la phrase « la lune est brillante ». Si x_1 désignait la lune et si bx signifiait « x est brillant », il suffirait d'écrire bx_1. Le problème est de remplacer x_1 par une description. Mais « la lune » n'est rien d'autre que « le satellite naturel de la Terre ». Posons donc $ax = \text{df}\ x$ est satellite naturel de la Terre. Si l'on parvient à formaliser la notion « le x, tel que ax », en donnant un sens à une notation du genre $(\iota x)ax$, on écrira simplement $b((\iota x)ax)$ soit « le x, tel que x est satellite naturel de la Terre, brille ».

L'usage du mot *le* dans un tel contexte, et partant du symbole ι, exige que deux conditions soient satisfaites:

1) Il existe un objet x tel que ax.
2) Il n'en existe qu'un seul.

En conséquence, l'introduction du symbolisme $(\iota x)ax$ exige que l'on ait $(\exists_1 x)ax$. En d'autres termes, l'écriture $b((\iota x)ax)$ peut se comprendre comme une abrévation:
$b((\iota x)ax) = \text{df } (\exists x)(ax \wedge (\forall y)(ay \supset x = y) \wedge bx)$.
L'opérateur ι lie la variable à laquelle il est appliqué, ce qu'on voit en remarquant que, dans le membre de droite, x est une variable liée. On pourra donc écrire plus simplement $b(\iota a)$. D'autre part, on peut chercher d'autres expressions plus simples que celle du membre de droite mais équivalentes. On choisit généralement $(\exists x)((\forall y)(ay \equiv x = y) \wedge bx)$. Nous poserons donc finalement:
$b(\iota a) = \text{df } (\exists x)(\forall y)(ay \equiv x = y) \wedge bx)$.

Partons maintenant d'une relation et posons, par exemple, $rxy = \text{df } x$ est père de y. Dans ce cas, aussi bien biologiquement que légalement, $(\forall y)(\exists_1 x)rxy$, autrement dit, tout individu (sauf Adam et Eve!) a un père et un seul. Il y a donc un sens à écrire ici $(\iota x)rxy$ soit « le x, tel que x est père de y.

Sous ces conditions d'existence et d'unicité, on pose généralement:
$r'y = \text{df } (\iota x)rxy = \text{df}$ le r de y.

Domaine, codomaine, champ

Une relation, disons « manger » n'existe pas entre tout couple d'objets. Dans cet exemple, elle n'existe qu'entre des mangeurs et des mangeables. En général, les objets qui peuvent être mis, comme premiers termes, en relation r avec d'autres objets, constituent le *domaine* de la relation:
$\text{Dom}(r) = \text{df } \{x \mid (\exists y)rxy\}$
Les objets qui peuvent être mis, comme seconds termes, en relation r avec d'autres objets, constituent le codomaine de la relation:
$\text{Cod}(r) = \text{df } \{y \mid (\exists x)rxy\}$
Enfin, l'union du domaine et du codomaine constitue le *champ* de la relation:
$\text{Ch}(r) = \text{df Dom}(r) \cup \text{Cod}(r)$

Supposons que $x \in \text{Ch}(r)$. Cela équivaut, par définition, à $x \in \text{Dom}(r) \vee x \in \text{Cod}(r)$. On a, par (**c1**):
$x \in \text{Dom}(r) \equiv (\exists y)rxy$. D'autre part, si dans la définition de $\text{Cod}(r)$, on substitue x à y et y à x, il vient $\text{Cod}(r) = \text{df } \{x \mid (\exists y)ryx\}$. Appliquant alors (**c1**), on a: $x \in \text{Cod}(r) \equiv (\exists y)ryx$. Donc enfin:
$x \in \text{Ch}(r) \equiv ((\exists y)rxy \vee (\exists y)ryx)$.

Ceci est bien conforme à l'intuition. Si x est élément du champ d'une relation r, il est en liaison r avec quelque objet, soit comme premier terme, soit comme second terme.

Remarque

Nous avions défini (I, p. 72) la réflexivité par:
Refl (r) = df $(\forall x)((\exists y)(rxy \vee ryx) \supset rxx)$.
On peut maintenant écrire plus simplement:
Refl (r) = df $(\forall x)(x \in \text{Ch}(r) \supset rxx)$.

Les ... de

Nous avons vu que si $(\exists_1 x)rxy$, il était possible d'introduire « le r de y » soit $r\text{‘}y$. Dans le cas où il y a plusieurs x qui sont en relation r avec y, par exemple si rxy = df x est enfant de y, on pourra considérer la classe des x tels que rxy, soit « les enfants de y ». Nous poserons alors:
$\vec{r}\text{‘}y$ = df $\{x|rxy\}$ = df les r de y.

Remarques

1. Si pour un y donné, il n'y a pas de x tel que rxy, la classe $\vec{r}\text{‘}y$ est vide, mais elle reste bien définie.

2. Si pour un y donné, il n'y a qu'un seul x tel que rxy, on ne lira évidemment plus $\vec{r}\text{‘}y$ « les r de y », mais « le r de y ». Ceci pourrait laisser croire que l'on a alors affaire à $r\text{‘}y$, ce qui n'est pas le cas. Soit x_1 cet x unique. Alors $r\text{‘}y = x$, tandis que $\vec{r}\text{‘}y = \{x_1\}$: $r\text{‘}y$ est un objet, $\vec{r}\text{‘}y$ est une classe.

Il y a une certaine parenté entre $\vec{r}\text{‘}y$ et Dom(r), mais les deux notions sont bien distinctes. Intuitivement, $\vec{r}\text{‘}y$ est la classe des antécédents par r d'un y, tandis que Dom(r) est la classe de tous les objets qui peuvent être antécédents. Formellement, dans $\vec{r}\text{‘}y$ la variable y est libre et dans Dom(r) elle est liée, c'est-à-dire seulement apparente. On a d'ailleurs:

$\vdash \vec{r}\text{‘}y \subseteq \text{Dom}(r)$

Cela revient, par la définition de l'inclusion des classes, à montrer que

$\vdash (\forall z)(z \in \vec{r}\text{‘}y \supset z \in \text{Dom}(r))$.

Or on a pour z quelconque:

1	$z \in \vec{r}\text{‘}y$	**hyp**
2	$z \in \{x\|rxy\}$	1, **rep df** $\vec{r}\text{‘}y$
3	rzy	2, ($\mathbf{c_1}$)
4	$(\exists y)rzy$	3, **∃i**
5	$z \in \{x\|(\exists y)rxy\}$	4, ($\mathbf{c_1}$)
6	$z \in \text{Dom}(r)$	5, **rep df** Dom

L'introduction du quantificateur existentiel à la ligne 4 paraît faire difficulté, puisque il se peut que $\vec{r}$‘ y soit vide. Toutefois tout cela reste cohérent puisque, comme nous l'avons vu, la classe vide est toujours incluse en toute classe.

Il est aussi possible d'introduire la classe des conséquents par r d'un x donné.

Nous poserons:

$\overleftarrow{r}$‘ $x = \text{df } \{y | rxy\}$.

On peut faire pour cette classe des remarques analogues à celles faites pour $\vec{r}$‘ y.

Les ... des

Soit l'expression « les chiens des logiciens ». Elle peut être analysée en une relation et en une classe:

$rxy = \text{df}$ x est chien de y

$\alpha = \text{df}$ les logiciens

Dire alors qu'un certain x appartient à la classe des chiens des logiciens, c'est dire qu'il existe un y logicien et que x est son chien, donc que:

$(\exists\, y)\ (rxy \wedge y \in \alpha)$.

Nous poserons:

$r``\alpha = \text{df } \{x | (\exists\, y)\ (rxy \wedge y \in \alpha) = \text{df}$ les r des α.

Cette définition n'exige pas de savoir si, pour un y donné, il y a plusieurs x tels que rxy ou s'il n'y en a qu'un seul. D'autre part $r``\Lambda = \Lambda$ puisque $\sim (\exists\, y)\ (y \in \Lambda)$. Enfin $r``\alpha$ peut encore être vide si $\sim (\exists\, y) rxy$. Telle serait par exemple « les diviseurs propres des nombres premiers » où un diviseur propre est un diviseur différent de 1 et du nombre lui-même.

BIBLIOGRAPHIE

Cette bibliographie sert de complément à celle du Fascicule I

3.1 Axiomatisations de la logique

Frege, G., *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle, 1879. (Il s'agit là de la première formalisation complète. Le texte est reproduit dans J. Van Heijenoort, *From Frege to Gödel.* Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967).

Hilbert, D.; Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik.* 3e éd. Berlin, Springer Verlag, 1949. (On trouve de cet ouvrage classique une version anglaise: *Principles of mathematical logic.* New York, Chelsea Pub. Co. 1950).

Whitehead, A. N.; Russell, B., *Principia Mathematica.* 3 vol., 2e éd. Cambridge Univ. Press, 1925-1927.

3.2 Sur le groupe INRC

Piaget, J., *Essai de logique opératoire.* Paris, Dunod (à paraître). (Il s'agit d'une édition revue par J. B. Grize du *Traité de logique*, Paris, A. Colin, 1949).

3.3 Interprétation électrique de la logique des propositions

Shannon, C., «A symbolic analysis of relay and switching circuits». *Trans. Amer. Inst. Elec. Eng.*, 1938, **57**, 713-723. (Il s'agit du premier article qui a traité ce problème).

LISTE DES SYMBOLES

Certains symboles sont utilisés en deux sens différents. Nous les signalons toujours immédiatement l'un après l'autre.

Les mots soulignés dans les explications renvoient à l'index et permettent de retrouver les définitions plus complètes.

Symbole

4.1 Lettres	*Explication*
a, b, c	*Variables de prédicats* à une place, donc variables de *propriétés*
a, b, c, d / a', b', c', d'	Représentent des 1 ou des 0 (v. 4.2)
$a_1^k, a_2^k, a_3^k, \ldots$	*Variables de prédicats* à k places. Ne sont utilisées que dans l'axiomatisation.
f	Représente une *application*
p, q, m	*Variables de propositions.* Prennent comme valeurs le vrai (1) ou le faux (0).
$p_1, p_2, p_3, \ldots$	*Variables de propositions.* Ne sont utilisées que dans l'axiomatisation.
r, s, t	*Variables de prédicats* à plus d'une place, donc variables de *relations*
x, y, z, u, v	*Variables d'objets.* Prennent leurs valeurs sur un *domaine d'objets*
$x_1, x_2, x_3, \ldots$	Constantes d'objets, sauf dans l'axiomatisation

$x_1, x_2, x_3, \ldots$	*Variables d'objets.* Ne sont utilisées que dans l'axiomatisation.
A, B, C	*Variables syntaxiques* qui désignent des expressions de la logique des prédicats.
P, Q, M	*Variables syntaxiques* qui désignent des *propositions atomiques* ou *composées*
R, S	Variables de relations. Elles désignent des classes de couples *ordonnés*
V	Ensemble des deux valeurs de vérité 1 et 0
X, Y, Z	*Variables syntaxiques* qui désignent des *variables d'objets*
I	*Transformation identique*
N	*Transformation de négation*
R	*Transformation de réciprocité*
D	*Transformation duale*
α, β, γ	Variables de classes. Elles désignent l'*extension* d'un prédicat.
Π	Ensemble des *propositions atomiques* ou *composées*
Π_2	Ensemble des propositions à deux atomes
Ω	*Domaine d'objets*

4.2 Quelques classes particulières

$\wedge$	La *classe vide*
$\vee$	La *classe totale*
Dom	Dom(r) désigne le *domaine* de la relation r
Cod	Cod(r) désigne le *codomaine* de la relation r
Ch	Ch(r) désigne le *champ* de la relation r
$\vec{r}`y$	*Les r de y*
$\overleftarrow{r}`x$	*Les r de x*
$r``\alpha$	*Les r des α*

4.3 Descriptions

$(\iota x)ax$	Le x tel que ax	v. *description*
ιa	Le a	

4.4 Parenthèses

$(a\ b\ c\ d)$	L'*évaluation* d'une proposition composée de deux atomes
$(a'\ b'\ c'\ d')$	L'*évaluation* de la transformée par N de $(a\ b\ c\ d)$
$[a\ b\ c\ d]$	La *classe d'équivalence* des propositions d'évaluation $(a\ b\ c\ d)$
$p\ (q)$	La proposition p élément de la classe [1 1 0 0] soit p quelque soit q
(x, y)	Le *couple ordonné* de premier terme x et de second terme y
$\{x \mid ax\}$	La classe des x tels que ax
$\{x\}$	La *classe singulière* qui contient x
$\{x, y\}$	La classe qui contient x et y
$A\ (X)$	Une expression de la logique des prédicats qui contient la *variable libre* X ou le résultat de la *substitution* dans A de X à la place d'une *variable libre.*
$A\ [X]$	Le résultat du *remplacement* dans A de X à la place d'une *variable libre*
$[P]$	La *classe d'équivalence* qui contient la proposition P

4.5 Signes de relations

$\in$	$x \in \alpha$: x est élément de la classe α
$\notin$	$x \notin \alpha$: x n'est pas élément de la classe α
$\subseteq$	$\alpha \subseteq \beta$: la classe α est contenue dans la classe β (v. *inclusion*)
$\subseteq$	$R \subseteq S$: la relation R est contenue dans la relation S (v. *inclusion*)
$\leqq$	Relation d'*ordre* « précéder » entre *classes d'équivalence* de propositions
$=$	$x = y$: x est identique à y (v. *identité*)
$=$	$\alpha = \beta$: la classe α est égale à la classe β (v. *égalité*)
$=$	$R = S$: la relation R est égale à la relation S (v. *égalité*)
$=$ df	Egale par définition
$\rightarrow$	Relation d'*implication*
$\leftrightarrow$	Relation d'*équivalence*

4.6 Signes d'opérations

$\sim$	*Négation.* $\sim p$: non-p
$\wedge$	*Conjonction.* $p \wedge q$: p et q.
$\vee$	*Disjonction non exclusive.* $p \vee q$: p ou q
w	*Disjonction exclusive.* p w q: soit p soit q
$\supset$	*Conditionnelle.* $p \supset q$: si p, alors q
$\equiv$	*Biconditionnelle.* $p \equiv q$: p si et seulement si q
$\mid$	$p \mid q$: pas à la fois p et q (v. 1.2).
$\mid$	$r \mid s$: relation *produit* de r et s
$\downarrow$	$p \downarrow q$: non-p et non-q (v. 1.2)
$\top$	$p \top q$ désigne la classe d'équivalence [1 1 1 1] (v. 1.3)
$\perp$	$p \perp q$ désigne la classe d'équivalence [0 0 0 0] (v. 1.3)
$\circ$	Désigne un *opérateur* binaire quelconque
$\times$	Signe de la multiplication arithmétique
$\times$	$\alpha \times \beta$: *produit cartésien* des classes α et β
$\forall$	*Quantificateur universel.* $(\forall x)$: pour tout x
$\exists$	*Quantificateur existentiel.* $(\exists x)$: il y au moins un x
$\exists_1$, $\exists_2$	$(\exists_1 x)$, $(\exists_2 x)$: il y exactement un, deux x
$\cup$	$\alpha \cup \beta$: *union* des classes α et β
$\cup$	$R \cup S$: *union* des relations R et S.
$\cap$	$\alpha \cap \beta$: *intersection* des classes α et β
$\cap$	$R \cap S$: *intersection* des relations R et S.
$\complement$	$\complement_\beta \alpha$: *complément* de la classe α par rapport à la classe β
—	$\overline{\alpha}$: le complément de la classe α
—	$\overline{R}$: le complément de la relation R
r^{-1}	L'*inverse* de la relation r
r^2	Le *produit* de la relation r par elle-même

4.7 Autres signes

$\vdash$	Indique que ce qui suit est une *tautologie* ou un *théorème*
$\sim \vdash$	Indique que ce qui suit n'est pas une tautologie ou n'est pas un théorème
$\vdash_1$	Indique que ce qui suit est un *théorème* au sens de la déduction naturelle
$\vdash_2$	Indique que ce qui suit est un *théorème* au sens d'un système axiomatique
$\vdash_t$	Précise que ce qui suit est une *tautologie*

INDEX DES FASCICULES I ET II*

* Les chiffres romains renvoient aux fascicules et les chiffres arabes aux pages.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE II

LISTE DES SYMBOLES

COLLECTION MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME

1. **B. MATALON**
   L'analyse hiérarchique.
2. **C. FLAMENT**
   Théorie des graphes et structures sociales.
3. **P. R. HALMOS**
   Introduction à la théorie des ensembles.
   Traduit par J. Gardelle.
4. **H. ROUANET**
   Les modèles stochastiques d'apprentissage.
5. **R. V. ANDREE**
   Introduction à l'algèbre.
   Traduit par Mme F. Denizot.
6. **P. LORENZEN**
   Métamathématique.
   Traduit par J.B. Grize.
7. **CAHIERS MATHÉMATIQUES I**
   Exercices corrigés sur des structures élémentaires.
8. **N. CHOMSKY et G. A. MILLER**
   L'analyse formelle des langues naturelles.
   Traduit par P. Richard et N. Ruwet.
9. **CAHIERS MATHÉMATIQUES 2**
   Exercices corrigés sur des structures élémentaires.
10. **J.-B. GRIZE**
    Logique moderne.
    Fascicule I.
11. **L. FREY**
    Analyse ordinale des évangiles synoptiques.
12. **ORDRES**
    Travaux du séminaire sur les ordres totaux finis, Aix-en-Provence.
13. **CAHIERS MATHÉMATIQUES 3**
    Algèbre et combinatoire.

MOUTON
GAUTHIER-VILLARS

